



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ENERGETICKÝ ÚSTAV**

ENERGY INSTITUTE

**TLUMENÍ TLAKOVÝCH PULZACÍ A SNIŽOVÁNÍ HLUKU  
V POTRUBNÍCH SYSTÉMECH**

DAMPING OF PRESSURE PULSATIONS AND NOISE REDUCTION IN PIPELINE SYSTEMS

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. ONDŘEJ ČEPL**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. VLADIMÍR HABÁN, Ph.D.**

**BRNO 2021**



# Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Bc. Ondřej Čepl**  
Studijní program: Strojní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.**  
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Tlumení tlakových pulzací a snižování hluku v potrubních systémech

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V potrubních systémech se setkáváme s tlakovými pulsacemi a v blízkosti těchto potrubí s hlukem. Diplomová práce zhodnotí možnosti tlumení tlakových pulzací a nadměrného hluku. V rámci diplomové práce bude proveden výpočet tlakových pulzací a to analyticky řešením základních pohybových rovnic i numericky pomocí běžně dostupných výpočetních systémů.

### Cíle diplomové práce:

Numerické modelování tlakových pulzací v potrubním systému s tlumičem pulzací.  
Analytické řešení tlakových a průtokových pulzací v potrubním systému s tlumičem pulzací.  
Porovnání výsledků numerického a analytického řešení.

### Seznam doporučené literatury:

NOVÝ, R.: Hluk a chvění. Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80--1-04347-9.

BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B.: Mechanika kontinua. Akademia, Praha 2000, ISBN 80-2-0772-2.

HABÁN, V.: Tlumení tlakových a průtokových pulzací: teze disertační práce. V Brně: Vysoké učení technické, 2001. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. ISBN 80-214-1905-9.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



## Abstrakt

Hlavním cílem této práce je řešení tlakových pulzací v potrubním systému s dynamickým tlumičem. Je představena vlastní geometrie laděné odbočky, která je zkoumána za pomoci vytvořeného matematického modelu, numerických simulací a výsledky jsou také ověřeny experimentálně. V odvozených řídicích vztazích jsou zahrnuty účinky dynamické i objemové viskozity. S využitím genetického algoritmu je vyřešena soustava nelineárních rovnic a stanovena frekvenční závislost objemové viskozity vzduchu dle naměřených dat. Je otestována správná funkčnost použitých snímačů tlaku. Zpracování experimentálních dat je provedeno za pomoci Fourierovy transformace při dodržení podmínky koherence. Na závěr je provedeno porovnání analytického, numerického a experimentálního přístupu pro různé geometrické varianty laděné odbočky.

## Klíčová slova

Laděná odbočka, dynamický tlumič, objemová viskozita, vlnová rovnice, tlumení tlakových pulzací, FFT, podmínka koherence.

## Abstract

The diploma thesis deals with pressure pulsations in pipeline system with dynamic muffler. There is presented original geometry of side-branch resonator. Pressure pulsations are solved by a created mathematical model, numerical simulations and verified by an experimental approach. The influence of dynamic and bulk viscosity is involved in derived governing equations. A system of nonlinear equations is solved by genetic algorithm and frequency dependent relationship of bulk viscosity of air is determined afterwards. The correct function of used pressure sensors is tested. The processing of experimental data is performed by the fast Fourier transform with coherent sampling. Finally, a comparison of analytical, numerical and experimental approaches is introduced for different geometric variants of presented muffler.

## Keywords

Side-branch resonator, dynamic muffler, bulk viscosity, wave equation, damping of pressure pulsations, FFT, coherent sampling.

## Bibliografická citace

ČEPL, O. *Tlumení tlakových pulzací a snižování hluku v potrubních systémech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 100 s. Vedoucí doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Tlumení tlakových pulzací a snižování hluku v potrubních systémech* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Vladimíra Habána, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

21. května 2021

.....  
Bc. Ondřej Čepl

## Poděkování

Děkuji svému vedoucímu doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D., za odborné vedení mé diplomové práce, vstřícnost, ochotu, trpělivost, poskytnuté velmi přínosné rady a čas strávený na konzultacích, které měly vždy příjemnou atmosféru.

Děkuji Ing. Martinu Hudcovi za jeho čas a trpělivost při provádění experimentu. Také za ochotu a poskytnuté rady a připomínky během vždy přátelských konzultací.

Děkuji svým rodičům za zázemí a podporu, kterou mi poskytli v průběhu celého studia a nejen během něj. Dále děkuji rodině i blízkým přátelům za podporu a příjemně strávené chvíle, díky kterým jsem se vždy příjemně odreagoval.

Děkuji své snoubence Lucii za její lásku, podporu, trpělivost a nadhled nejen během studia.

Bc. Ondřej Čepl



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>1 Matematický model</b>	<b>11</b>
1.1 Základní rovnice . . . . .	12
1.2 Vlnová rovnice . . . . .	17
<b>2 Analytické řešení</b>	<b>23</b>
2.1 Geometrie . . . . .	23
2.2 Matematický model soustavy . . . . .	24
2.3 Vyhodnocení . . . . .	28
<b>3 Numerické řešení</b>	<b>37</b>
3.1 Geometrie a výpočetní síť . . . . .	39
3.2 Nastavení a řešení . . . . .	42
3.3 Výsledky simulací . . . . .	43
<b>4 Měření a vyhodnocování dat</b>	<b>49</b>
4.1 Vyhodnocení časového signálu . . . . .	51
4.2 Testování mikrofونů . . . . .	57
<b>5 Zjištění objemové viskozity</b>	<b>61</b>
5.1 Měření na volné trubce . . . . .	61
5.2 Formulace řídicí funkce . . . . .	64
5.3 Řešení nelineární komplexní funkce v Matlabu . . . . .	66
5.4 Aproximace dat . . . . .	72
<b>6 Experimentální ověření</b>	<b>75</b>
6.1 Výsledky experimentu . . . . .	77
<b>7 Porovnání výsledků</b>	<b>82</b>
7.1 Uzavřený konec . . . . .	82
7.2 Otevřený konec . . . . .	87
7.3 Závěrečná diskuze . . . . .	90
<b>Závěr</b>	<b>93</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>95</b>
<b>Seznam použitých symbolů a zkratk</b>	<b>98</b>
<b>Přílohy</b>	<b>100</b>

# Úvod

S rostoucí kvalitou života je tlumení tlakových pulzací ve vzduchu stále více aktuálním tématem. Akustický hluk dokáže být velice rušivý již při nízkých hladinách intenzity zvuku a dlouhodobé vystavení jeho účinků dokáže navíc způsobit řadu zdravotních problémů. Ačkoliv existuje celá řada způsobů tlumení akustického hluku, tato práce se zabývá použitím dynamického rezonátoru v potrubním systému.

Dynamický tlumič v porovnání s často využívanými porézními materiály je velice jednoduchý a levný, ale je určen k utlumení velice úzkého frekvenčního pásma. Při šíření jednofrekvenčního intenzivního signálu v potrubním systému dokáže dynamický rezonátor při optimálním návrhu přeladit daný systém, aby na požadované frekvenci byla velikost akustického tlaku řádově nižší. Aby rezonátor fungoval správně, je nutné jej umístit do kmitny tlaku, což je problém hlavně u stojatého vlnění. V uzlu tlaku má použití tlumiče minimální efekt. Návrh rezonátoru musí být precizní, neboť při špatném návrhu dochází k opačnému efektu než bylo původně zamýšleno – pulzace jsou v potrubním systému zesíleny.

Cílem této práce je zkoumání tlakových pulzací na potrubním systému s dynamickým tlumičem. Je navržen originální tvar tlumiče pulzací ve formě laděné odbočky a vytvoření jeho matematický a numerický model, za pomoci kterého lze řešit tlakové pulzace. Navíc bylo provedeno experimentální měření zkoumané geometrie, díky kterému je možné zhodnotit vhodnost obou přístupů.

V první kapitole jsou představeny základní vztahy platné pro stlačitelnou tekutinu – rovnice kontinuity, Navier-Stokesova rovnice a stavová rovnice. Při kombinaci všech tří rovnic je možné získat vlnovou rovnici, která popisuje chování tlakových pulzací. Odvození je provedeno včetně viskózních účinků. První část druhé kapitoly obsahuje návrh geometrie s laděnou odbočkou, na které je zkoumáno šíření a útlum tlakových pulzací. Dále je na základě vlnových rovnic odvozených v předchozí části vytvořen matematický model, který definuje představenou soustavu. Rovnice modelu jsou mezi sebou provázány díky vhodným okrajovým podmínkám. V pořadí třetí kapitola popisuje numerický přístup. Společná geometrie je vymodelována v počítači a s využitím výpočetní sítě konečných prvků provedena simulace v programu *Ansys Harmonic Acoustics*.

Následující část stručně popisuje způsob zapojení měřicí techniky při provádění experimentu, způsob vybuzení a snímání tlakových pulzací. Na závěr kapitoly je provedeno testování použitých snímačů. V páté kapitole je popsáno měření na trubce bez tlumiče, čehož je využito nejen pro zjištění výchozího stavu, ale také k určení objemové viskozity vzduchu. Jednoduchý matematický model je nalaďen v závislosti na experimentálním měření. Díky většímu počtu snímačů je možné vytvořit přeurenou soustavu, ze které je pomocí metody nejmenších čtverců nalezena hodnota objemové viskozity. Předposlední kapitola obsahuje návrh a realizaci měřicí tratě s laděnou odbočkou. Jsou také prezentovány výsledky získané na základě experimentálních dat. Je provedeno porovnání pro několik zvolených geometrických variant dynamického tlumiče. Poslední část práce se zabývá srovnáním představených přístupů řešení tlakových pulzací. Jsou diskutovány shody a rozdíly mezi jednotlivými přístupy a provedeno zhodnocení použitých metod.

# 1. Matematický model

Následující kapitola čerpá hlavně z literatury [5, 23].

V této části práce je cílem odvodit vlnovou rovnici pro tlak a průtok, která popisuje přenos přes jeden úsek trubice. K tomu je nutné zkombinovat tři rovnice – stavovou rovnici, rovnici kontinuity a Navier-Stokesovu rovnici.

Zvuk se šíří v každém stlačitelném prostředí, které lze považovat za kontinuum, tzn. ačkoliv prostor jako takový není zcela vyplněn, obsahuje dostatečné množství částic, které způsobí spojitě chování<sup>1</sup>[23]. Čím vyšší je tuhost média, ve kterém se šíří tlakové vlny, tím rychleji se vzruch šíří. V absolutně tuhém tělese by se pulzace šířily nekonečně velkou rychlostí, taková látka však neexistuje, proto je rychlost zvuku vždy konečná. Naopak při velmi malém počtu částic se tlakové vlny vůbec nešíří (např. ve vakuu).

Při šíření zvukových vln se přenáší vzruch (energie), nikoliv molekuly vzduchu jako takové. Ty kmitají v okolí rovnovážné polohy a dochází k zhušťování a řídnutí částic. Akustické vlny neboli tlakové pulzace mají řádově nižší hodnotu tlaku oproti statickým hodnotám. Při zkoumání akustických dějů se obvykle statická hodnota tlaku (atmosférický tlak) považuje jako referenční a jsou pozorovány pouze oscilace kolem této hodnoty.

Každé přenosové médium má dva parametry, které ovlivňují rychlost zvuku v dané látce – hustota a "tuhost", resp. modul objemové pružnosti [6]. Závislost lze vyjádřit následujícím vztahem, přičemž svislá čára značí, která veličina zůstává konstantní:

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} = \sqrt{\left. \frac{K}{\rho} \right|_s} = \sqrt{\kappa \cdot \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T} = \sqrt{\kappa \cdot \left. \frac{K}{\rho} \right|_T}, \quad (1.1)$$

$a$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	rychlost zvuku,
$p$ (Pa)	tlak plynu,
$\rho$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	hustota,
$K$ (Pa)	modul objemové pružnosti,
$\kappa$ (–)	Poissonova konstanta,
$T$ (K)	termodynamická teplota,
$s$ ( $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ )	entropie.

Děj isoentropický ( $s = \text{konst.}$ ) značí děj za konstantní entropie - vratný adiabatický děj. U vzduchu hraje největší roli teplota, tlak, vlhkost vzduchu a složení vzduchu [21]. Vzhledem k tomu, že vzduch je homogenní (kyslík, dusík a argon zaujímají více než 99,95 % objemu vzduchu) a jeho složení je až na některé výjimky stálé, je vliv změny koncentrace dílčích plynů zanedbatelný. Mezi nejvýznamnější proměnnou složku patří vodní pára, která je zahrnuta v relativní vlhkosti. Velikost akustických pulzací dosahuje běžně do několika desítek pascalů. Poněvadž i změny v řádech kPa mají minimální vliv na změnu rychlosti zvuku, lze tento vliv zcela zanedbat [8].

Vlhkost vzduchu neovlivňuje modul objemové pružnosti vzduchu, ale jeho hustotu – molekuly kyslíku a dusíku jsou nahrazovány lehčími molekulami vodní páry, tím pádem při zvyšování vlhkosti klesá hustota plynu a roste rychlost zvuku [6]. Dle experimentů a výpočtů [8, 13, 21] bylo zjištěno pro různé frekvence zvuku slyšitelného spektra, pro teplotu 20° C a atmosférický tlak, že při relativních vlhkostech nad 30 % roste rychlost

<sup>1</sup>Částice tekutiny je velká v molekulárním měřítku, ale velmi malá při srovnání s délkovým měřítkem probíhajícího děje.

## 1.1. ZÁKLADNÍ ROVNICE

zvuku lineárně se vzrůstající relativní vlhkostí. Nárůst v rychlosti je přibližně o 0,04 % při zvýšení relativní vlhkosti o 10 %. Vyjma teploty má na rychlost zvuku ve vzduchu největší vliv právě relativní vlhkost, přesto jsou rozdíly při malých změnách nepatrné. Vliv teploty je znázorněn níže.

### 1.1. Základní rovnice

#### Stavová rovnice

Pro popis šíření tlakových pulzací ve vzduchu se nejčastěji používá adiabatický děj. Kmitání částic je tak rychlé, že nedochází k výměně tepla mezi sousedními částicemi, a proto je adiabatický děj vhodnější než izotermický [5]. Pro adiabatický děj platí Poissonova rovnice:

$$p \cdot V^\kappa = \text{konst.}, \quad (1.2)$$

$V$  (m<sup>3</sup>)                      objem plynu.

Objem tekutiny lze rozepsat přes měrný objem  $v$  (m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>) a hmotnost  $m$  (kg) vztahem  $V = m \cdot v$ . Měrný objem tekutiny je nepřímo úměrný hustotě –  $v \sim 1/\rho$ . Pokud se aplikují předchozí vztahy do rovnice (1.2) a bude se uvažovat, že celková hmotnost tekutiny se nemění (zákon zachování hmotnosti –  $\Delta m = 0$ ), dostane se rovnice do tvaru

$$p \cdot V^\kappa = p \cdot \rho^{-\kappa} = \text{konst.} \quad (1.3)$$

Celá rovnice se nyní zderivuje podle času a rozepíše do parciálních derivací

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_s \cdot \rho^{-\kappa} - p\kappa\rho^{-\kappa-1} \cdot \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_s = 0, \quad (1.4)$$

$t$  (s)                      čas.

Po podělení vzniklé rovnice konstantou, která je společná pro oba členy ( $\rho^{-\kappa}$ ), se získá závislost tlaku na hustotě a času

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_s = \frac{p \cdot \kappa}{\rho} \cdot \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_s. \quad (1.5)$$

Na obou stranách rovnice se nachází derivace podle času. Je možné přejít na tvar pro barotropní tekutinu (hustota je pouze funkcí tlaku) a rovnici upravit do následujícího tvaru

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{p \cdot \kappa}{\rho}. \quad (1.6)$$

Ze stavové rovnice pro ideální plyn

$$pv = \frac{p}{\rho} = rT, \quad (1.7)$$

$r$  (J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>)    měrná plynová konstanta,

lze vyjádřit poměr tlaku a hustoty a dosadit ho do vztahu (1.6). Po dosazení vztahu do



rovnice (1.1) za parciální derivaci tlaku podle hustoty vzniká závislost rychlosti zvuku na teplotě.

$$a = \sqrt{\kappa r T} \quad (1.8)$$

Ze vztahu (1.8) lze vidět, že s rostoucí teplotou roste i rychlost zvuku, tato závislost je nelineární. Při odvozování vztahu byly zavedeny následující předpoklady: vratný adiabatický děj při šíření vln (konstantní entropie) – zavedení barotropní tekutiny, stálé složení vzduchu a jeho hustota při konstantním tlaku, použití zákona zachování hmotnosti, zanedbání kondukce a radiace. Nejedná se proto o popis reálné tekutiny, ale o zjednodušený případ. I přes zavedená zjednodušení však vztahy relativně přesně popisují skutečnou rychlost zvuku. Pro běžné podmínky, tj. teplotu  $t = 20^\circ\text{C}$ , tlak  $p = 101\,325\text{ Pa}$ , měrnou plynovou konstantu  $r = 287,1\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a Poissonovu konstantu  $\kappa = 1,4$ , vychází rychlost zvuku  $c \doteq 343,3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Zákon zachování hmotnosti

V dalších kapitolách bude využívána Einsteinova sumační symbolika – základní principy jsou shrnuté např. v [26].

Zákon zachování hmotnosti představuje pro tekutiny rovnice kontinuity. Základní diferenciální rovnice kontinuity pro stlačitelnou kapalinu při zachování hmotnosti (doména neobsahuje zřídla ani propady hmoty) je ve tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \quad (1.9)$$

$v_i\text{ (m}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$  rychlost proudění na pozici  $x_i$  v čase  $t$ .

Při použití diferenciální formy rovnic je nutné předpokládat spojitě kontinuum a existenci derivací. První člen rovnice (1.9) ( $\partial\rho/\partial t$ ) lze s využitím vztahu (1.5) nahradit a přepsat rovnici do tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\rho}{p \cdot \kappa} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0. \quad (1.10)$$

Druhý zlomek prvního členu, který v tomto případě představuje konstantu, lze zapsat pomocí rychlosti zvuku – zavedení rychlosti zvuku do rovnice kontinuity. Navíc se rozepíše parciální derivace sumy druhého členu do jednotlivých složek

$$\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{1}{a_0^2} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot v_i = 0, \quad (1.11)$$

$a_0\text{ (m}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$  konstantní rychlost zvuku.

Poslední člen na levé straně rovnice (1.11) se vynásobí jedničkou ve tvaru  $\partial t/\partial t$  – hodnota výrazu se nezmění. Pro všechny spojitě parciální derivace  $m$ -tého řádu dle Schwarzovy věty platí, že pořadí jednotlivých parciálních derivací lze zaměňovat. Zavádí se předpoklad spojitých druhých derivací, je možné zaměnit pořadí derivací a člen  $\partial\rho/\partial t$  nahradit dle vztahu (1.5):

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial x_i} v_i \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\rho}{p \cdot \kappa} = 0. \quad (1.12)$$

Po následné úpravě vzniká obecný tvar rovnice kontinuity pro stlačitelnou tekutinu v diferenciálním tvaru:

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{v_i}{a_0^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (1.13)$$

## 1.1. ZÁKLADNÍ ROVNICE

Pokud tekutina téměř vůbec neproudí nebo proudí velmi pomalu vzhledem k rychlosti zvuku ( $v \ll a_0$ ), je možné nelineární člen ( $v_i/a_0^2 \cdot \partial p / \partial x_i$ ) zanedbat a získat zjednodušený tvar rovnice kontinuity

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.14)$$

### Pohybová rovnice

Názvy pohybová rovnice, zákon zachování hybnosti nebo rovnice silové rovnováhy jsou používány pro stejnou rovnici, případně pronásobenou nějakou proměnnou jako je např. hustota. Rovnováhu sil působící na elementární objem tekutiny v mechanice tekutin představuje Navier-Stokesova rovnice, která přesně popisuje jeden okamžik turbulentního proudění. Jedná se o speciální případ Cauchyho rovnice, která popisuje zákon zachování hybnosti jakékoliv tekutiny, která má spojitě chování [1]. Navier-Stokesova rovnice je nelineární parciální diferenciální rovnice, která není obecně řešitelná kvůli konvektivnímu členu. Nejobecnější tvar rovnice pro viskózní stlačitelnou newtonovskou tekutinu při uvažování Eulerovy metody popisu kontinua je:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad (1.15)$$

$\sigma_{ij}$  (Pa)            Cauchyho tenzor napětí,  
 $f_i$  (m·s<sup>-2</sup>)        zrychlení způsobené vnějšími objemovými silami .

Tenzor napětí charakterizuje silové působení uvnitř viskózní tekutiny. Je možné jej rozepsat na vratnou část, která platí pro dokonalou tekutinu, a nevratnou část vyjadřující viskózní účinky.

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \Pi_{ij} \quad (1.16)$$

$\tau_{ij}$  (Pa)            tenzor vratných napětí,  
 $\Pi_{ij}$  (Pa)            tenzor nevratných (třecích) napětí.

Tenzor vratných napětí lze rozepsat pro izotropní tekutinu (všechna normálová napětí jsou si rovna) pomocí tlaku na tvar  $\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  značí Kroneckerovo delta a znaménko mínus skutečnost, že tlak míří dovnitř tekutiny. Tenzor nevratných napětí lze pro izotropní newtonovskou látku (tenzor napětí není závislý na antisymetrické části gradientu rychlosti, která popisuje rotaci elementárního objemu během elementárního časového intervalu) rozepsat do tvaru:

$$\Pi_{ij} = 2\mu v_{ij} + b\delta_{ij}v_{kk}, \quad (1.17)$$

kde

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad v_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

$\mu$  (Pa·s)            dynamická viskozita tekutiny,  
 $b$  (Pa·s)            druhá dynamická viskozita tekutiny,  
 $v_{ij}$  (s<sup>-1</sup>)        tenzor rychlosti deformace,  
 $v_{kk}$  (s<sup>-1</sup>)        divergence rychlosti.

Celkový tenzor napětí je poté možné rozepsat do tvaru:

$$\sigma_{ij} = -p_e \delta_{ij} + b \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.18)$$

$p_e$  (Pa)                      hydrostatický/termodynamický tlak.

Tenzor rychlosti deformace lze rozepsat na izotropní a deviační část. Tyto dvě části se vloží do tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$ , který získá nový tvar, přičemž se zavádí objemová viskozita  $\mu_b$  [25, 7, 17], která představuje nevratný odpor proti změnám objemu [14].

$$\sigma_{ij} = (-p_e + \mu_b \frac{\partial v_k}{\partial x_k}) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (1.19)$$

$\mu_b$  (Pa·s)                      objemová viskozita,

kde

$$\mu_b = b + \frac{2}{3} \mu. \quad (1.20)$$

Názvosloví jednotlivých "viskozit" je často odlišné v různých zdrojích. Druhá viskozita  $b$  se v anglické literatuře často označuje jako *second coefficient of viscosity*, *coefficient of longitudinal viscosity* či *bulk viscosity* a značí se také symboly  $\lambda$ ,  $k$  či  $\mu'$ . Objemová viskozita  $\mu_b$  je označována jinými autory pomocí názvů *bulk viscosity*, *volume viscosity*, *dilatational viscosity*, *expansion viscosity* či *second coefficient of viscosity* [17]. Duplicita některých názvů vnáší do této problematiky určitý chaos a je potřeba se pozorně podívat na definici jednotlivých proměnných.

Rovnice (1.19) ukazuje, že izotropní část (první člen v závorkách na pravé straně) obsahuje viskózní člen, který se přidává k termodynamickému tlaku  $p_e$  (dynamická viskozita může vyvolat i normálové napětí a ne pouze smykové). Člen  $\mu_b \cdot \partial v_k / \partial x_k$  představuje rozdíl mezi termodynamickým tlakem  $p_e$  a mechanickým tlakem  $p_m$  [7], který je definován jako záporný průměr diagonálních členů (normálových napětí) tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  [25].

$$p_m = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = p_e - \mu_b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (1.21)$$

$p_m$  (Pa)                      mechanický tlak.

Dynamická viskozita  $\mu$  i druhá dynamická viskozita  $b$  obecně závisí na teplotě, tlaku a fyzikálních vlastnostech tekutiny [5]. Zatímco dynamická viskozita je dobře známá vlastnost tekutiny, hodnota druhé viskozity je často neznámá [17], a proto se mnohdy zavádí zjednodušení známé jako Stokesova hypotéza.

Stokesova hypotéza je platná pro zředěné jednoatomové plyny a byla odvozena z kinetické teorie plynů za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy tekutiny [23]. Ke stejnému vztahu lze dospět přes zúžení tenzoru napětí (sčítání přes dva indexy). Rozepsáním vztahu (1.18) do kartézského souřadného systému vzniká následující vztah:

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -p + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - p + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - p + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (1.22)$$

## 1.1. ZÁKLADNÍ ROVNICE

Lze si všimnout, že po sečtení třech členů s dynamickou viskozitou vzniká divergence rychlosti. Po úpravě se rovnice zjednoduší do tvaru:

$$\sigma_{ii} = -3p + (3b + 2\mu) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (1.23)$$

U nestlačitelné tekutiny úplně vypadne poslední (viskózní) člen, což znamená, že se velikost tlaku  $p$  rovná střední hodnotě součtu hlavních napětí ( $p$  je brán jako průměrný tlak).

$$p_e = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (1.24)$$

Má-li zůstat v platnosti vztah (1.24) i pro stlačitelnou tekutinu, musí být viskózní člen roven nule a tedy druhá dynamická viskozita musí nabývat hodnoty

$$b = -\frac{2}{3}\mu, \quad (1.25)$$

čemuž odpovídá nulová objemová viskozita  $\mu_b = 0$ . Vztah (1.25) odpovídá Stokesově hypotéze jednoatomových plynů [23, 5, 27]. Platnost Stokesovy hypotézy koresponduje se stavem, kdy izotropní dilatace elementárního objemu tekutiny nevytváří viskózní napětí. Tato teorie se často aplikuje na všechny plyny bez ohledu na to, zda se jedná o jednoatomový plyn či nikoliv [5, 7]. Předpoklad termodynamické rovnováhy selhává při velkých změnách elementárního objemu  $\partial v_k / \partial x_k$  nebo při jevech, kdy jsou změny malé, ale zodpovědné za chování pozorovaných jevů [23].

Pro víceatomové plyny již neplatí předpoklad termodynamické rovnováhy, a proto není možné použít Stokesovu hypotézu.

Mnoho experimentů zaměřených na absorpci zvuku může být vysvětleno pomocí relaxační teorie plynů [24]. Jedná se o efekt spojený s odezvou a reakcí systému na vnější napětí. Nastává časové zpoždění pro nastolení termodynamické rovnováhy vnitřních stupňů volnosti molekul [10]. Odezva (zpoždění) může být způsobena přerozdělením energie mezi translačními, rotačními a vibračními stupni volnosti [10]. Zpoždění u jednoatomových plynů je mnohem kratší (je téměř nulové), protože molekuly nemají rotační a vibrační stupně volnosti [7] (jednoatomové plyny nemají členitou strukturu, mají pouze translační stupně volnosti). Proto je mechanický tlak okamžitě roven termodynamickému a objemová viskozita  $\mu_b$  je rovna nule<sup>2</sup>:  $b = -2\mu/3$  [25].

Rotační a vibrační módy jsou charakteristické právě pro víceatomové plyny [7]. K nastolení rovnováhy je zapotřebí mnohem více srážek molekul a relaxace není okamžitá, ale časově závislá [10]. Relativně dlouhé odchýlení od termodynamické rovnováhy je spojeno s hlavním mechanismem disipace energie tekutin [23]. Tento efekt souvisí s druhou viskozitou, nikoliv s první.

Při útlumu vln ve víceatomových plynech se ukázalo, že dynamická viskozita (shear viscosity) má velice malou hodnotu v porovnání s objemovou (též druhou) viskozitou, která ji řádově převyšuje [23, 17, 24]. Objemová viskozita tak hraje významnou roli při disipaci energie.

<sup>2</sup>Je možné, že některé jiné faktory mohou způsobit výraznější časovou odezvu u jednoatomových plynů jako je např. elektronové buzení či chemické reakce [25].

## 1.2. Vlnová rovnice

K odvození vlnové rovnice jsou potřeba nyní již jen dvě rovnice – rovnice kontinuity se zahrnutím rychlosti zvuku (1.13), která již obsahuje stavovou rovnici, a Navier-Stokesova rovnice. Pohybová rovnice v obecném tvaru s uvažováním gravitačního zrychlení jako jediného vnějšího zrychlení vypadá následovně:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = g_i,$$

$g_i$  ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ )      gravitační zrychlení.

Po rozepsání tenzoru napětí ve tvaru (1.18) se pohybová rovnice změní do tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p\delta_{ij} + b\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) = g_i. \quad (1.26)$$

V předcházející rovnici a dalších úvahách je vzhledem k chystaným zjednodušením jednotlivých rovnic uvažován pouze jeden tlak (hydrostatický) s označením  $p$ . V dalším kroku se rozepíší členy tenzoru napětí, přičemž viskozita a druhá viskozita nejsou považovány za funkce souřadnice ani času. U tlakového členu a členu s druhou viskozitou se Kroneckerovo delta promítne do derivace:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = g_i. \quad (1.27)$$

Dále se předpokládá, že rychlost proudění je velice malá a je možné zanedbat konvektivní člen. Rovněž se nebude brát v potaz vliv gravitačních sil. Pohybová rovnice se těmito předpoklady velice zjednoduší, poněvadž vypadne nelineární člen.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1.28)$$

Rovnice se nyní zderivuje podle souřadnice  $x_i$ .

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1.29)$$

Zavádí se předpoklad spojitých třetích derivací, lze na základě Schwarzovy věty zaměnit pořadí jednotlivých derivací. Rovnice (1.29) se nyní upraví tak, aby každý člen obsahující nějakou derivaci rychlosti obsahoval divergenci rychlosti.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (1.30)$$

U všech členů z rovnice (1.30) lze u divergence rychlosti zaměnit označení indexů u partiálních derivací tak, aby měly označení  $\partial v_k / \partial x_k$ . Při úpravě dvou stejných indexů ostatních

## 1.2. VLNOVÁ ROVNICE

parciálních derivací si lze všimnout, že poslední tři členy mají stejné třetí derivace a lze je proto sečíst.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \frac{(b + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (1.31)$$

Dalším krokem bude vyjádření divergence rychlosti z rovnice kontinuity. Tu je nutné nejdříve upravit do vhodného tvaru.

Pro připomenutí rovnice kontinuity ve svém obecném tvaru:

$$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{v_i}{a_0^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

Podobně jak byly zavedeny předpoklady u pohybové rovnice, zavede se i předpoklad u rovnice kontinuity. Třetí člen obsahující  $v_i/c_0^2$  je zanedbán. Jeho velikost je malá, protože je uvažován případ, kdy rychlost proudění je řádově menší v porovnání s rychlostí zvuku  $v_i \ll c_0$ . Rovnice kontinuity se zjednoduší na tvar (1.14). Ze zjednodušené rovnice se vyjádří divergence rychlosti, přičemž se u ní změni značení indexů tak, aby odpovídalo značení v rovnici (1.31)

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho a_0^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Nyní je možné dosadit zjednodušenou rovnici kontinuity (1.32) do pohybové rovnice (1.30) za členy v závorkách. Vzniklá rovnice je navíc roznásobena hustotou  $\rho$ . Po menší úpravě vzniká vlnová rovnice pro tlak.

$$-\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \frac{(b + 2\mu)}{\rho a_0^2} \frac{\partial^3 p}{\partial x_i^2 \partial t} = 0 \quad (1.33)$$

Zavádí se předpoklad konstantního rozložení tlaku po průřezu. Od této chvíle již probíhá řešení jednorozměrné úlohy a je možné psát pouze souřadnici  $x$  namísto  $x_i$ . Na závěr se rovnice ještě pronásobí kvadrátem rychlosti zvuku.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(b + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\mu_b + \frac{4}{3}\mu)}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Rovnice je rozepsaná jak pro druhou dynamickou viskozitu  $b$ , tak pro objemovou viskozitu  $\mu_b$ . Uvedená rovnice se nazývá také *vlnová rovnice* a popisuje závislost šíření tlakových pulzací v závislosti na souřadnici a času.

### Řešení vlnové rovnice

Z rovnice (1.34) je patrné, že tlak je závislý na poloze a času  $p = p(x, t)$ , bude se předpokládat řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$p(x, t) = T(t) \cdot X(x), \quad (1.35)$$

$T(t)$  časově závislá funkce,  
 $X(x)$  polohově závislá funkce.

Časově závislá funkce je popsána pomocí imaginární exponenciály, která vyjadřuje rotující jednotkový vektor.

$$T(t) = e^{i\omega t}, \quad (1.36)$$

e Eulerovo číslo,  
 $\omega$  (rad · s<sup>-1</sup>) úhlová rychlost,  
i imaginární jednotka.

Tlaková závislost (1.35) přejde do nové podoby, ze které se bude dále vycházet.

$$p(x, t) = e^{i\omega t} \cdot X(x) \quad (1.37)$$

Pro následné dosazení do vlnové rovnice se nyní vytvoří potřebné parciální derivace předpokládaného řešení rovnice.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} \cdot X(x) \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = e^{i\omega t} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = i\omega e^{i\omega t} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (1.40)$$

Jednotlivé parciální derivace ((1.38), (1.39) a (1.40)) lze dosadit do vlnové rovnice (1.34).

$$\omega^2 e^{i\omega t} \cdot X(x) + a_0^2 e^{i\omega t} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + i\omega e^{i\omega t} \frac{(b + 2\mu)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.41)$$

Ve všech členech vzniklé rovnice se nachází imaginární exponenciála, kterou lze v rovnici zkrátit. Tímto krokem se rovnice stane závislá pouze na poloze, nikoliv už na čase.

$$\omega^2 \cdot X(x) + a_0^2 \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + i\omega \frac{(b + 2\mu)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.42)$$

Z druhého a třetího členu lze vytknout druhou polohovou derivaci a rovnice se dostane do tvaru:

$$X(x) \cdot \omega^2 + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \left[ a_0^2 + \frac{i\omega(b + 2\mu)}{\rho} \right] = 0. \quad (1.43)$$

Rychlost zvuku je možné vyjádřit pro isoentropický děj dle vztahu (1.1) a převést rovnici (1.43) do nové podoby.

$$X(x) \cdot \omega^2 + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \left[ \frac{K + i\omega(b + 2\mu)}{\rho} \right] = 0. \quad (1.44)$$

Odmocnina z členu v hranatých závorkách se označí jako *komplexní rychlost zvuku*  $c_k$ .

$$a_k = \sqrt{\frac{K + i\omega(b + 2\mu)}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + i\omega(\mu_b + \frac{4}{3}\mu)}{\rho}} \quad (1.45)$$

Po použití vztahu pro komplexní rychlost zvuku a podělením její druhou mocninou rovnici (1.43), aby se osamostatnila nejvyšší derivace, vzniká upravená homogenní LPDE2. Obecné označení rovnice v tomto tvaru je *Helmholtzova rovnice*.

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \cdot \frac{\omega^2}{a_k^2} = 0. \quad (1.46)$$

## 1.2. VLNOVÁ ROVNICE

Ačkoliv se jedná o parciální diferenciální rovnici, pro jednorozměrnou úlohu ji lze řešit jako obyčejnou diferenciální rovnici. Funkce  $X$  je pouze funkcí  $x$  a v tomto tvaru není předpokládána časová závislost. Rovnice (1.46) se řeší jako LODE2 – za pomoci charakteristické rovnice, která je kvadratická.

$$\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a_k^2} = 0, \quad (1.47)$$

$\lambda$  kořen rovnice.

Lze vyjádřit  $\lambda$ , která představuje kořen charakteristické rovnice. Jelikož je diskriminant kvadratické funkce záporný, vychází dva komplexně sdružené kořeny.

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \frac{\omega}{a_k} \quad (1.48)$$

Toto řešení charakteristické rovnice dává dva kořeny (partikulární řešení).

$$\begin{aligned} X_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x\right) \\ X_2(x) &= e^{\lambda_2 x} = \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x\right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Při součtu či rozdílu dvou řešení homogenních LODEn nebo vynásobením řešení komplexní konstantou vznikne opět řešení stejné diferenciální rovnice [18]. Toho lze využít pro vyjádření řešení pomocí sinu a cosinu. Je nutné oddělit reálnou a imaginární část – komplexní rychlost zvuku má pod odmocninou reálnou i imaginární část. Lze vyjádřit jednotlivé části, avšak výrazy nejsou triviální a špatně by se s nimi dále zacházelo. Bude se pracovat pouze s komplexními exponenciálami. Následující rovnice představuje jednu variantu ze všech obecných řešení.

$$X(x) = C_1 \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x\right) + C_2 \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x\right), \quad (1.50)$$

$C_1, C_2$  konstanty.

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  jsou obecně komplexní a je možné získat jejich hodnotu při použití okrajových podmínek (OP). Výsledné řešení vlnové rovnice (1.34) dostává tvar:

$$p(x, t) = e^{i\omega t} \left[ C_1 \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x\right) + C_2 \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x\right) \right]. \quad (1.51)$$

Výsledná rovnice (1.51) popisuje průběh tlaku v závislosti na poloze a na času. Po dosazení okrajových podmínek lze zjistit konstanty  $C_1$  a  $C_2$  – zjištění konkrétního řešení problému. Komplexní rychlost zvuku má reálnou i imaginární část, proto hodnota komplexní exponenciály může nabývat jakékoliv hodnoty a není omezena pouze v intervalu  $< -1, 1 >$ , což zajišťuje obecnost vztahu a není přímo nutné uvažovat konstantu u časově nezávislé části řešení. Pro názornost je zde rozepsána závislost exponenciály s komplexním argumentem:  $e^{(a+bi)} = e^a (\cos b + i \sin b)$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Je patrné, že funkce mohou nabývat libovolné komplexní hodnoty.



### Závislost průtoku

K odvození vztahu, který popisuje závislost průtoku na poloze a času, se použije již odvozený obecný vztah pro průběh tlaku uvedený o několik řádků výše a také rovnice kontinuity ve tvaru (1.32), kde je vyjádřena divergence rychlosti v závislosti na tlaku. Pro dosažení závislosti (1.51) do rovnice kontinuity je potřeba nejdříve vyjádřit derivaci tlaku podle času. Poněvadž jediná časově závislá část je exponenciála s imaginárním exponentem, lze zbytek výrazu považovat za konstantní:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = i\omega e^{i\omega t} \cdot \left[ C_1 \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}x\right) + C_2 \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}x\right) \right]. \quad (1.52)$$

Po dosazení derivace tlaku do rovnice kontinuity vzniká následující vztah.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\omega}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \cdot \left[ C_1 \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}x\right) + C_2 \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}x\right) \right], \quad (1.53)$$

$a_0$ (m·s <sup>-1</sup> )	rychlost zvuku,
$a_k$ (m·s <sup>-1</sup> )	komplexní rychlost zvuku,
$C_1, C_2$	konstanty.

Rovnice kontinuity obecně popisuje zákon zachování hmotnosti pro tři směry. Zde je uvažován pouze 1D případ, není proto nutné již používat sumační index. Nyní se provede separace proměnných a rovnice se zintegruje, aby na levé straně vznikla pouze rychlost. Exponenciála s imaginárním exponentem je nezávislá na poloze, proto je možné ji vytknout před integrál.

$$v = -i\frac{\omega}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \cdot \int \left[ C_1 \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}x\right) + C_2 \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}x\right) \right] dx \quad (1.54)$$

Ačkoliv se předpokládá, že konstanty  $C_1$  a  $C_2$  jsou komplexní, nejsou však závislé na souřadnici. Je možné jít s integrálem k jednotlivým exponenciálám.

$$v = -i\frac{\omega}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \left[ C_1 \int \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}x\right) dx + C_2 \int \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}x\right) dx \right] \quad (1.55)$$

V dalším kroku se využije substituce argumentu exponenciály.

$$\text{substituce : } \left| \begin{array}{l} i\frac{\omega}{a_k} \cdot x = u \\ dx = \frac{a_k}{i\omega} du \end{array} \right|.$$

Integrály přejdou do nové podoby, navíc se vytknou parametry společné pro oba členy, které nejsou závislé na poloze.

$$v = -i\frac{\omega}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \cdot \frac{a_k}{i\omega} \left[ C_1 \int e^{(u)} du + C_2 \int e^{(-u)} du \right] \quad (1.56)$$

## 1.2. VLNOVÁ ROVNICE

V dalším kroku se vyřeší integrály a zkrátí se úhlová rychlost  $\omega$  a imaginární jednotka  $i$ , které jsou jak v čitateli, tak ve jmenovateli.

$$v = -\frac{a_k}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \left[ C_1 e^{(u)} - C_2 e^{(-u)} \right] + C_3, \quad (1.57)$$

$C_3$  integrační konstanta.

Po vyřešení integrálů vzniká integrační konstanta  $C_3$ , která představuje stacionární rychlost. Stacionární rychlost je konstantní a není dále uvažována, protože jsou řešeny pouze tlakové pulzace:  $C_3 = 0$ . V dalším kroku se dosadí za substituci a mínus před imaginárním číslem se vloží do hranatých závorek.

$$v = \frac{a_k}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \left[ -C_1 \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} x \right) + C_2 \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} x \right) \right] \quad (1.58)$$

Pro trubici o konstantním průřezu a při předpokladu konstantní rychlosti po celém průřezu lze rozepsat průtokovou závislost ze vztahu  $Q = S \cdot v$ .

$$Q(x, t) = \frac{S a_k}{\rho a_0^2} e^{i\omega t} \left[ -C_1 \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} x \right) + C_2 \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} x \right) \right] \quad (1.59)$$

$Q$  ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )      průtok,  
 $S$  ( $\text{m}^2$ )              plocha průřezu potrubí.

Rovnice (1.59) a (1.51) lze využít při řešení celého systému a jsou výsledkem této části práce. S využitím zmíněných zjednodušení a předpokladů popisují analytické chování průtoku a tlaku po délce trubice v závislosti na čase. Rovnice jsou obecné a konkrétní řešení lze získat po doplnění dvou okrajových podmínek pro každou rovnici. Je-li potřeba popsat např. systém tří různých potrubí, je nutné mít šest OP pro jednoznačný popis problému.

Jelikož je zbytečné vykreslovat tlakové i průtokové pulzace současně, protože vztahy pro tlak (1.51) a průtok (1.59) jsou vzájemně provázané, jsou v této práci k popisu pulzací využity pouze tlakové závislosti.

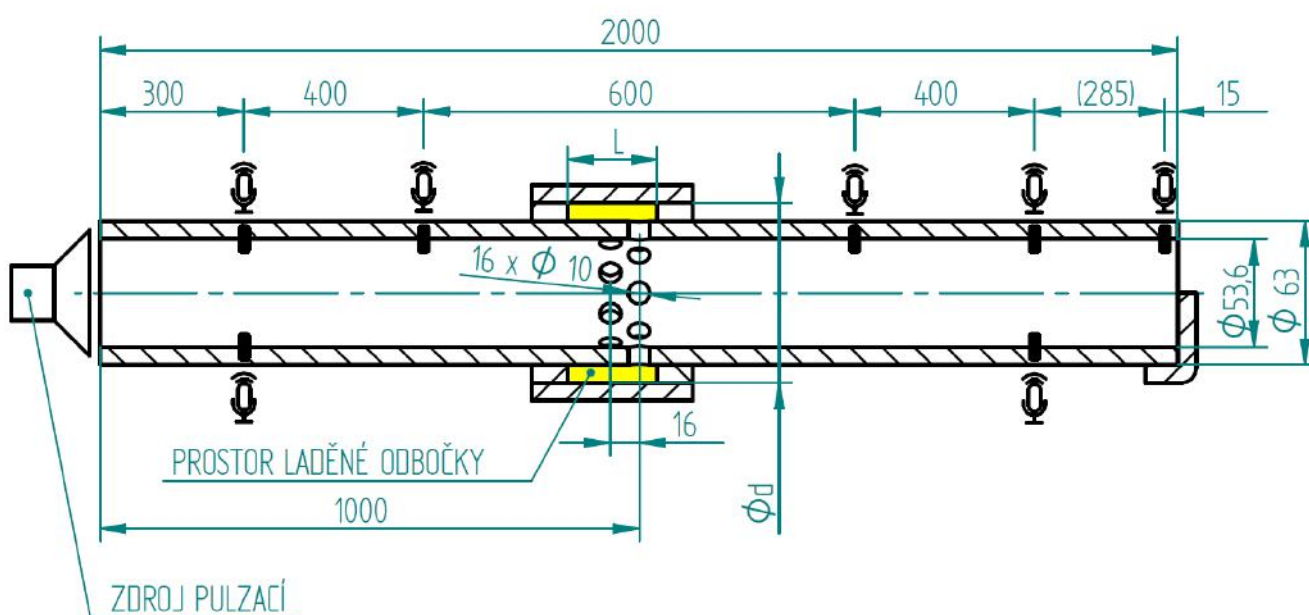
## 2. Analytické řešení

V této kapitole je nejdříve představena společná geometrie, která je následně zjednodušena, aby na ni bylo možné aplikovat výše odvozené rovnice. Matematický model je tvořen systémem rovnic, který je dále řešen. Na závěr jsou představeny výsledky simulace.

### 2.1. Geometrie

Cílem práce je řešení tlakových a průtokových pulzací v potrubním systému. Byla navržena vlastní geometrie tratě, na které se bude dále zkoumat šíření a útlum pulzací.

Bylo zvoleno potrubí o délce  $L_{potr} = 2$  m, ke které je připojen dynamický tlumič ve formě laděné odbočky. Laděná odbočka byla navržena tak, aby se dala snadno realizovat v praxi. Návrh geometrie je zobrazen na následujícím obrázku 2.1.

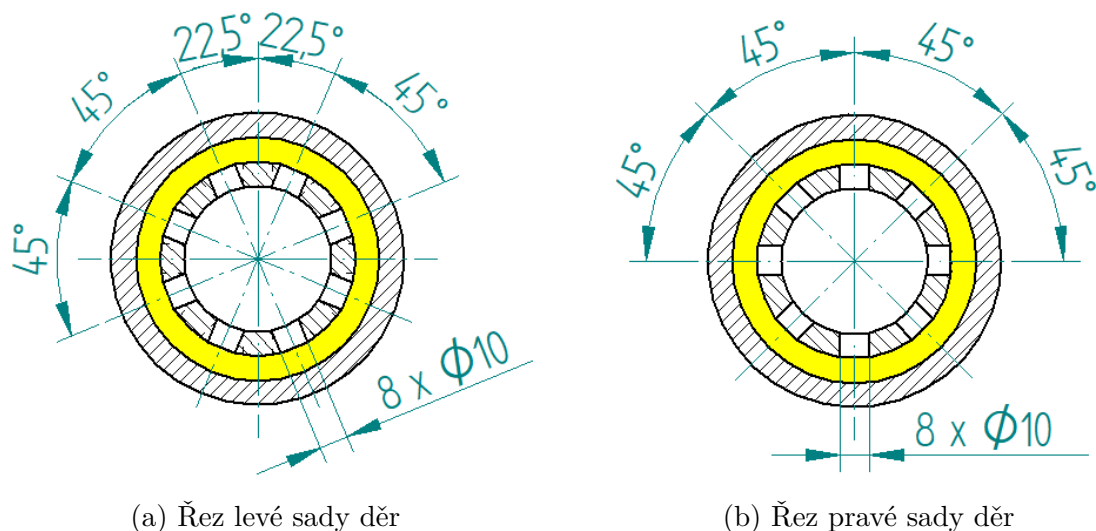


Obrázek 2.1: Schéma společné geometrie – potrubí s laděnou odbočkou

Jedná se o přímou trubku o vnitřním průměru  $d_{in} = 53,6$  mm a délce 2 m. V levé části systému se nachází reproduktor, který slouží jako zdroj pulzací. Po délce potrubí je na pěti místech sledován tlak, konec potrubí je ve dvou variantách a to buď otevřený nebo uzavřený.

Ve střední části se nachází laděná odbočka. Do hlavního potrubí jsou vyvrtány dvě kruhová pole po osmi dírách, dohromady 16 děr. Průměr děr byl zvolen  $\phi d_{díry} = 10$  mm, vzdálenost mezi dvěma řadami děr je 16 mm. Díry jsou po příčném průřezu rozmístěny rovnoměrně (po  $45^\circ$ ) a jednotlivé řady jsou vůči sobě posunuty o  $22,5^\circ$ , aby se díry pravidelně střídaly. Ačkoliv se kvůli díráům sníží tuhost, potrubí zůstane celistvé. Schémata příčných řezů potrubí (včetně laděné odbočky) obou řad jsou zobrazena na obrázku 2.2. Žlutou barvou je znázorněn prostor laděné odbočky. Geometricky jde o dutý válec, který má proměnnou délku  $L$ , proměnný vnější průměr  $d$  a daný vnitřní průměr  $d_{potr} = 63$  mm. Prostor laděné odbočky je ohraničen vnější obálkou hlavního potrubí, vnitřním povrchem

## 2.2. MATEMATICKÝ MODEL SOUSTAVY



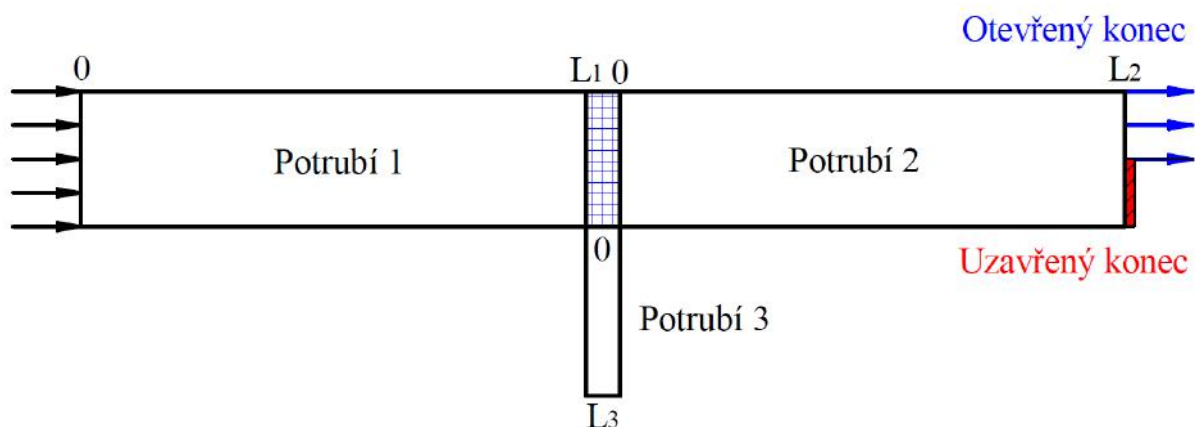
Obrázek 2.2: Znázornění uspořádání děr v příčných řezech

krátké trubky, která se nasadí na hlavní potrubí, a dvěma kusy, které vyplňují prostor mezi oběma trubkami.

Byly zvoleny tři délky laděné odbočky  $L = 74, 94$  a  $114$  mm a tři různé průměry ohraničující laděnou odbočku z vnějšku  $d = 75, 90$  a  $110$  mm. Příčný průřez mezikruží rezonátoru lze vypočítat ze vztahu  $S_{LO} = \pi \cdot (d^2 - d_{potr}^2)/4$ .

## 2.2. Matematický model soustavy

K vytvoření matematického modelu je nutné nejdříve výše představenou geometrickou soustavu zjednodušit. Zavádí se 1D model (veličiny se po průřezu nemění) složený ze tří částí znázorněný na obr. 2.3. První dvě části jsou sériově řazené rovné trubky o stejném



Obrázek 2.3: Matematický model navržené geometrie

průřezu. Ačkoliv je druhá řada děr umístěna přesně uprostřed hlavního potrubí, místo společného uzlu pro všechny tři části je zvoleno mezi oběma řadami děr (místo je stejně vzdálené od obou řad děr) a proto nejsou délky prvních dvou úseků stejné a nepatrně se liší,  $L_1 \neq L_2$ . Rozdíl je daný právě o polovinu posunutí vyvrtaných řad. Poslední část (Potrubí 3) představuje laděnou odbočku. Předpokládá se, že odbočka má stejný tvar jako potrubí definované průřezem  $S_{LO}$ , který je žlutě znázorněn na obr. 2.2 – mezikruží

dané průměrem  $\phi d$  a průměrem vnější obálky hlavního potrubí (63 mm). K systému dvou trubek je laděná odbočka připojena paralelně. Spojení je předpokládáno bodové, protože vzdálenost mezi dírami je minimálně o jeden řád menší než vlnová délka nejkratších budících vln. Reálně není spojení bodové a problém je mnohem více komplexní – bylo by nutné předpokládat, že tlaková vlna má jinou amplitudu a fázi pro každé pole děr. Pro snadnější popis se předpokládá laděná odbočka ve formě nekonečně tenké spáry – v 1D je to spojení bodové.

V levé části schématu 2.3 je znázorněno buzení, modře šrafovaný úsek ve střední části je uzel spojující všechny tři části a napravo je znázorněn otevřený nebo uzavřený konec potrubí. Délková souřadnice nabývá v prvním úseku hodnot od nuly do  $L_1$ , ve druhém od nuly do  $L_2$  a ve třetím od nuly do  $L_3$ , jak je znázorněno na obrázku.

K popisu tlakových pulzací se využije soustava tří rovnic. Každá rovnice popisuje jednotlivý úsek soustavy. Za pomoci okrajových podmínek se všechny rovnice propojí, řešení se prováže a tlak bude spojitý. Tři tlakové rovnice ve tvaru (1.51) mají následující tvar:

$$\begin{aligned} p_1(x_1, t) &= e^{i\omega t} \left[ C_{11} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x_1\right) + C_{12} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x_1\right) \right], & x_1 \in < 0; L_1 > \\ p_2(x_2, t) &= e^{i\omega t} \left[ C_{21} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x_2\right) + C_{22} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x_2\right) \right], & x_2 \in < 0; L_2 > \\ p_3(x_3, t) &= e^{i\omega t} \left[ C_{31} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x_3\right) + C_{32} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x_3\right) \right], & x_3 \in < 0; L_3 >. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Z rovnic lze vidět, že obsahují celkem šest neznámých konstant ( $C_{11}$  až  $C_{32}$ ), proto je potřeba zadat šest okrajových podmínek. První index u konstanty  $C$  značí, o kterou rovnici se jedná, druhý index značí pořadové číslo konstanty v rovnici.

Okrajové podmínky:

- (1) Tlak na konci 1. potrubí je stejný jako tlak na začátku 2. potrubí:

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{L}_1) = \mathbf{p}_2(\mathbf{0}).$$

- (2) Tlak na konci 1. potrubí je stejný jako tlak na začátku 3. potrubí:

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{L}_1) = \mathbf{p}_3(\mathbf{0}).$$

- (3) Rovnice kontinuity v místě středního uzlu (konec prvního úseku nebo začátek 2. a 3. úseku):

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{L}_1) = \mathbf{Q}_2(\mathbf{0}) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{0}).$$

- (4) Nulový průtok na konci laděné odbočky (3. úsek):

$$\mathbf{Q}_3(\mathbf{L}_3) = \mathbf{0}.$$

- (5) Nulový průtok nebo tlak na konci 2. trubice podle toho, zda je konec uzavřený (vlevo) nebo otevřený (vpravo):

$$\mathbf{Q}_2(\mathbf{L}_2) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_2(\mathbf{L}_2) = \mathbf{0}.$$

- (6) Hodnota tlaku v místě prvního snímače  $K_{S1}$  je známá :

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_{S1}) = \mathbf{K}_{S1}.$$

## 2.2. MATEMATICKÝ MODEL SOUSTAVY

Z prvních dvou podmínek implicitně plyne, že tlak na začátku druhého úseku je stejný jako tlak na začátku laděné odbočky (3. úseku):  $p_2(0) = p_3(0)$ . Díky prvním třem podmínkám je zajištěna spojitost tlaku a průtoku všech tří rovnic ve středním uzlu.

Okrajové podmínky je možné rozepsat do rovnic dle vztahů ve (2.1). Ve všech podmínkách kromě poslední (6) lze zkrátit časovou exponenciálu  $e^{i\omega t}$ . Celý vztah včetně časové exponenciály je rozepsán pouze pro první okrajovou podmínku, u ostatních je zkrácení provedeno ještě před prvním zápisem.

$$e^{i\omega t} \left[ C_{11} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) + C_{12} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) \right] = e^{i\omega t} \left[ C_{21} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} 0 \right) + C_{22} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} 0 \right) \right] \quad (2.2)$$

Lze si všimnout, že některé argumenty exponenciál jsou nulové a exponenciály se zredukuje na jedničky. Po zkrácení časové exponenciály a přepsání výrazů  $e^0$  na jedničky, přejdou podmínky do následujícího tvaru, přičemž pořadí rovnic je zachováno dle výčtu výše:

$$\begin{aligned} (1) \quad & C_{11} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) + C_{12} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) = C_{21} + C_{22}, \\ (2) \quad & C_{21} + C_{22} = C_{31} + C_{32}, \\ (3) \quad & \frac{S_1 a_k}{\rho a_0^2} \left[ -C_{11} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) + C_{21} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_1 \right) \right] = \\ & \frac{S_2 a_k}{\rho a_0^2} \left[ -C_{21} + C_{22} \right] + \frac{S_3 a_k}{\rho a_0^2} \left[ -C_{31} + C_{32} \right], \\ (4) \quad & \frac{S_3 a_k}{\rho a_0^2} \left[ -C_{31} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_3 \right) + C_{32} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_3 \right) \right] = 0, \\ (5a) \quad & \frac{S_2 a_k}{\rho a_0^2} \left[ -C_{21} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_2 \right) + C_{22} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_2 \right) \right] = 0, \\ (5b) \quad & C_{21} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} L_2 \right) + C_{22} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} L_2 \right) = 0, \\ (6) \quad & p_1(x_{S1}) = e^{i\omega t} \left[ C_{11} \cdot \exp \left( i \frac{\omega}{a_k} x_{S1} \right) + C_{12} \cdot \exp \left( -i \frac{\omega}{a_k} x_{S1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Čísla na levé straně značí, o kolikátou okrajovou podmínku se jedná, napravo je označení celého systému rovnic. V případě páté okrajové podmínky je v (5a) uvažován uzavřený konec trubice, v (5b) konec otevřený. Rovnice (3), (4) a (5a) lze ještě dále upravit zkrácením některých veličin. V šesté rovnici lze sloučit člen na levé straně s časovou exponenciálou. Vznikne člen představující komplexní tlak v místě  $x_{S1}$ , protože imaginární exponenciála má jednotkovou velikost a vyjadřuje rotující jednotkový vektor.

$$p_{1,k}(x_{S1}) = \frac{p_1(x_{S1})}{e^{i\omega t}},$$

$p_{1,k}(x_{S1})$  (Pa) komplexní tlak v místě  $x_{S1}$ .

Rovnice se dále přepíše, aby na levé straně byly proměnné veličiny a na pravé straně pouze výrazy nezávislé na proměnných.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & C_{11} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}L_1\right) + C_{12} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}L_1\right) - C_{21} - C_{22} = 0, \\
 (2) \quad & C_{21} + C_{22} - C_{31} - C_{32} = 0, \\
 (3) \quad & S_1 \left[ -C_{11} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}L_1\right) + C_{21} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}L_1\right) \right] \\
 & - S_2 [-C_{21} + C_{22}] - S_3 [-C_{31} + C_{32}] = 0, \\
 (4) \quad & -C_{31} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}L_3\right) + C_{32} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}L_3\right) = 0, \\
 (5a) \quad & -C_{21} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}L_2\right) + C_{22} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}L_2\right) = 0, \\
 (5b) \quad & C_{21} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}L_2\right) + C_{22} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}L_2\right) = 0, \\
 (6) \quad & C_{11} \cdot \exp\left(i\frac{\omega}{a_k}x_{S1}\right) + C_{12} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega}{a_k}x_{S1}\right) = p_{1,a}(x_{S1}).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Neznámé jsou pouze komplexní konstanty  $C_{11}$  až  $C_{32}$  – jedná se o soustavu lineárních rovnic, proto je možné soustavu zapsat v maticové formě.

$$\begin{bmatrix}
 e^{i\frac{\omega}{a_k}L_1} & e^{-i\frac{\omega}{a_k}L_1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 -S_1 e^{i\frac{\omega}{a_k}L_1} & S_1 e^{-i\frac{\omega}{a_k}L_1} & S_2 & -S_2 & S_3 & -S_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{i\frac{\omega}{a_k}L_3} & e^{-i\frac{\omega}{a_k}L_3} \\
 0 & 0 & \mp e^{i\frac{\omega}{a_k}L_2} & e^{-i\frac{\omega}{a_k}L_2} & 0 & 0 \\
 e^{i\frac{\omega}{a_k}x_{S1}} & e^{-i\frac{\omega}{a_k}x_{S1}} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{31} \\ C_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{1,a}(x_{S1}) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Z maticového zápisu je jasné patrné, že jediný nenulový člen na pravé straně je u poslední rovnice. Pomocí tohoto členu se vnáší do modelu buzení tlakových pulzací.

Pátá podmínka, která byla pro variantu uzavřeného a otevřeného konce, je nyní zapsaná v jedné rovnici, kde jediným rozdílem je znaménko členu ve třetím sloupci:  $(-)$  pro uzavřený konec a  $(+)$  pro otevřený.

Podmínku lze pro otevřený konec definovat i trochu jiným způsobem. Jedná se o podmínku kritického odporu (předepsané impedance) na konci druhého úseku potrubí. Podobně jako v elektrotechnice, je impedance definovaná i v akustice. Akustická impedance způsobí jak tlakový úbytek, tak i fázové posunutí. Na rozdíl od tlakové podmínky není tlak na výstupu z potrubí nulový, ale přesto podmínka předepisuje jistou tlakovou ztrátu. Impedance  $z$  je definovaná následujícím vztahem [11, 15]:

$$z = \frac{p}{v} \tag{2.6}$$

$p$  (Pa)                      akustický tlak,

$v$  ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )              rychlost,



### 2.3. VYHODNOCENÍ

$z$  (Pa·s·m<sup>-1</sup>) akustická impedance.

Pro nekonečně dlouhé potrubí kruhového průřezu, ve kterém se šíří rovinné vlny, je možné impedanci zapsat za pomoci hustoty a rychlosti zvuku ve tvaru  $z = \rho \cdot a_0$  [15]. V této práci je tato podmínka použita, i přes to, že se jedná o konečně dlouhé potrubí.

Podmínku lze přepsat do tvaru  $p = v \cdot \rho \cdot a_0$ . Po dosazení do rovnice za rychlost zvuku a tlak, které jsou vyjádřené v první kapitole, získá po drobných úpravách podmínka pro otevřený konec potrubí odlišnou podobu:

$$C_{21} \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) + C_{22} \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) = \frac{a_k}{a_0} \left[ -C_{21} \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) + C_{22} \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) \right]. \quad (2.7)$$

Vzhledem k tomu, že na levé i pravé straně se nachází stejné členy, lze některé sloučit. Rovnice přejde do své finální podoby. Podmínka je doznačena (5c), aby byla jasně zařazená ve výše představené soustavě.

$$(5c) \quad C_{21} \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) \left(1 + \frac{a_k}{a_0}\right) + C_{22} \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} L_2\right) \left(1 - \frac{a_k}{a_0}\right) = 0 \quad (2.8)$$

V této práci jsou u otevřeného konce využity oba přístupy – tlaková podmínka i podmínka kritického odporu (impedance) a jednotlivé přístupy jsou mezi sebou porovnány. Skutečnost je někde mezi oběma přístupy.

Soustavu (2.5) lze vyřešit např. pomocí Gaussovy eliminační metody. Výstupem řešení jsou konstanty  $C_{11}$  až  $C_{32}$ , které jsou odlišné pro různé úhlové rychlosti. Je možné vyjádřit jednotlivé konstanty analyticky, ale výrazy jsou příliš složité a nemají žádnou vypovídající hodnotu, proto zde nebudou uvedeny.

### 2.3. Vyhodnocení

Aby bylo možné soustavu rovnic vyřešit, je nutné nejdříve zvolit nebo spočítat některé veličiny. V této práci je zvolen zkoumaný rozsah frekvencí  $f \in < 100, 2000 >$  Hz. Dále je předpokládána frekvenčně závislá objemová viskozita, která se projeví na komplexní rychlosti zvuku. Závislost je více popsána v kapitole 5, zde je uveden pouze výsledek. Byl zaveden předpoklad platnosti závislosti na celém zkoumaném intervalu frekvencí:

$$\mu_b = \frac{h}{f^2} = \frac{94 \ 310}{f^2}, \quad f \in < 100; 2000 > \text{ Hz.}$$

$\mu_b$ (Pa·s)	objemová viskozita,
$f$ (Hz)	frekvence,
$h$ (Pa)	součinitel objemové viskozity.

K vyřešení soustavy rovnic bylo použito řešení pomocí *Symbolic Math toolbox* v *Matlabu*, který dokáže pro malé soustavy vytvořit analytické řešení (řešení je exaktní). Po zadání všech známých proměnných je vyčíslení konstant již numerické.

V tabulce 2.1 je shrnutí všech známých veličin a parametrů, které jsou použity při simulaci.



Tabulka 2.1: Shrnutí základních veličin a parametrů

veličina	označení	závislost	přibližná velikost	jednotka
průměr potrubí 1 a 2	$d_{in}$		53,6	(mm)
průřez potrubí 1 a 2	$S_1 = S_2$	$d_{in}^2/4$	$2,3 \times 10^{-3}$	(m <sup>2</sup> )
vnější prům. LO	$d$		75/90/110	(mm)
průřez lad. odb.	$S_3 = S_{LO}$	$\frac{\pi(d^2 - d_{potr}^2)}{4}$		(m <sup>2</sup> )
délka 1. potrubí	$L_1$		0,992	(m)
délka 2. potrubí	$L_2$		1,008	(m)
délka lad. odb.	$L_3$		94/114	(mm)
amp. tlaku v místě 1. sním.	$p_{1,a}(x_{S1})$		1	(Pa)
modul pružnosti vzduchu	$K$		117 650	(Pa)
dynamická viskozita	$\mu$		$18,03 \times 10^{-6}$	(Pa·s)
hustota vzduchu	$\rho$		1,225	(kg·m <sup>-3</sup> )
poloha 1. snímače	$x_{S1}$		0,3	(m)

### Výsledky simulace

Po vyřešení soustavy rovnic lze konstanty  $C_{11}$  až  $C_{32}$  dosadit do rovnic v (2.1), které popisují průběh tlaku v jednotlivých úsecích. Pro názornost byly vytvořeny animace, které dobře popisují, co se děje v celém systému.

Na následujících animacích je možné vidět průběh tlaku po délce v různých časových okamžicích – průběh tlaku byl vynásoben imaginární exponenciálou, která nabývá různých poloh jedné periody, tzn.  $e^{ik2\pi}$ , kde  $k \in (0; 1)$ . Modrá barva v animacích znázorňuje úsek 1. potrubí, černá značí úsek 2. potrubí a červená průběh tlaku v laděné odbočce (LO). Pro názornost byla polohová souřadnice LO zobrazena od místa společného uzlu dále ve směru druhého úseku potrubí. Ze všech animací je patrné, že tlak v místě společného uzlu je stejný pro všechny tři úseky. Rovněž derivace tlaku na konci hlavního potrubí a laděné odbočky má nulovou hodnotu, což potvrzuje zadané okrajové podmínky pro uzavřený konec. Parametry, při kterých byly simulace vytvořeny, jsou zaznačeny v horních částech grafů.

Jako první je zobrazen případ, ve kterém je v místě napojení odbočky uzel tlaku (animace 2.4). Odbočka má v takovém případě minimální vliv a téměř neovlivní průběh tlakové vlny. Amplituda na konci laděné odbočky dosahuje velice malých hodnot.

Druhý případ animace znázorňuje, co se děje, když laděná odbočka plní svou funkci správně – je umístěna v místě kmitny tlaku a má vhodně zvolenou délku a průřez pro danou frekvenci. Díky tomu, že tlak v místě odbočky značně kmitá, dokáže dynamický tlumič účinně snížit amplitudu tlakových pulzací, které postupují do 2. úseku potrubí. Celá situace je znázorněna v animaci 2.5. Při porovnání amplitudy tlaku, která do potrubí vstupuje a amplitudy, která vystupuje, lze vidět, že hodnoty jsou řádově nižší.

Laděná odbočka funguje primárně jen na velmi úzké pásmo frekvencí. Přeladí systém tak, aby na požadované frekvenci byl minimální tlak. Pokud se budící frekvence změní, může být tlumič neúčinný, jak je znázorněno na první animaci 2.4, nebo dokonce mít opačný efekt než bylo původně zamýšleno.

Při špatném návrhu laděné odbočky může vzniknout situace, ve které tlumič škodí. Zesiluje výstupní amplitudu tlaku a tlakové pulzace se tím ještě posílí, proto je nutné navrhovat dynamický tlumič s jistou opatrností. Zesílení tlaku na výstupu je znázorněno v následující animaci 2.6.

### 2.3. VYHODNOCENÍ

Animace 2.4: Průběh tlaku v závislosti na poloze a času – případ uzlu tlaku v místě odbočky

Animace 2.5: Průběh tlaku v závislosti na poloze a čase – vhodně zvolený průřez a délka odbočky pro danou frekvenci

Animace průběhu tlaku po délce dávají dobrou představu o tom, co se děje uvnitř soustavy, avšak platí pouze pro jednu frekvenci. Pro zvolené délky a průřezy laděné odbočky byla vytvořena amplitudová spektra pro zkoumaný rozsah frekvencí. Spektra byla vytvořena pro místa snímačů tlaku. Spektra nejsou spojitá, ale jsou vypočítána od 100 Hz do 2000 Hz s krokem po 5 Hz (s ohledem na zvolený frekvenční interval).

Animace 2.6: Průběh tlaku v závislosti na poloze a čase – špatně zvolený průřez a délka odbočky pro danou frekvenci

Společně s amplitudovými spektry systému s laděnou odbočkou byly vytvořeny spektra stejného systému, ale bez laděné odbočky. Takový systém je definovaný pouze jednou trubicí (popsaný jednou rovnicí). K tlakové rovnici je nutné předepsat dvě OP, aby byla řešitelná. První podmínka je stejná pro všechny varianty – předepsaný tlak 1. snímače (podmínka (6) v systému (2.4) u soustavy s odbočkou). Druhá OP závisí na podmínce na konci potrubí. Jedná se o podmínky (5a), (5b) a (5c). Podrobnější řešení jedné trubice s uzavřeným koncem je v kapitole 5.2, případy s nulovým tlakem nebo předepsanou impedancí jsou obdobné k uzavřenému konci a nebudou více rozepsány.

V místě prvního snímače byla zvolena amplituda tlaku rovna jedné, proto lze přímo v grafech vidět poměr amplitudy tlaku  $n$ -tého snímače vůči prvnímu. Vodorovná čára představuje poměr prvního snímače vůči prvnímu, proto má konstantní hodnotu rovnu jedné. První dva snímače jsou před laděnou odbočkou, snímače tři, čtyři a pět za laděnou odbočkou, přičemž snímač číslo pět je téměř na výstupu.

### Uzavřený konec

Následující graf 2.7 znázorňuje amplitudové spektrum pro případ systému s laděnou odbočkou (plná čára) a pro případ bez odbočky (čárkovaná čára). Jsou vyneseny poměry amplitud tlaků  $n$ -tého snímače vůči prvnímu. Grafy jsou znázorněny pro všechny snímače, resp. snímači je myšlen podíl tlaku na dané pozici. V grafu lze přepínat mezi různými variantami (různé délky laděné odbočky  $L$  a vnější průměry  $d$ ) a přímo je porovnávat mezi sebou. Informace o dané variantě je zapsána v titulku každého grafu. Popis grafů je vytvořen pro první případ, tj. varianta délka  $L = 74$  mm a průměr  $\phi d = 75$  mm, ostatní varianty lze získat obdobným způsobem. Pro vzájemné porovnání různých geometrií jsou zavedena zkrácená označení: pro variantu  $L = 74$  mm a průměr  $\phi d = 75$  mm je použito označení L74d75. Stejným způsobem lze popsat i zbylé geometrie.

### 2.3. VYHODNOCENÍ

Obrázek 2.7: Porovnání poměrů amplitudového spektra systému bez a s laděnou odbočkou pro uzavřený konec potrubí pro různé délky a průřezy

Z grafu 2.7 lze vidět, že velká část spektra se změnila minimálně, avšak je možné vypočítat oblasti, kde byl signál utlumen v porovnání s variantou bez odbočky (velký propad plných křivek vůči čárkovaným). Jedná se hlavně o frekvence 860 a 1160 Hz. Tyto hodnoty lze porovnat s teoretickou hodnotou frekvence naladění (FN), kterou je možné spočítat z následujícího vztahu:

$$f_{lad,(k)} = \frac{a_0 \cdot (2k - 1)}{4L}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

$f_{lad,(k)}$  (Hz)      k-tá frekvence naladění odbočky,  
 $L$  (m)              délka odbočky.

Vztah je primárně určen k výpočtu frekvence naladění na LO tvaru přímého potrubí. I přes to, že útlumy by měly být viditelné i pro liché násobky FN ( $k > 1$ ), většinou se systém ladí na její první frekvenci. Je-li níže zmínka jen o frekvenci naladění, je myšlena první FN ( $k=1$ ). Teoretická hodnota frekvence naladění při rychlosti zvuku  $a_0 = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  vychází pro geometrii L74d75 1158,8 Hz, což velmi dobře odpovídá druhé zmíněné frekvenci útlumu této varianty.

Vzhledem k tomu, že průběhy jsou často špatně čitelné kvůli velkému množství křivek, byly vytvořeny také poměry obou průběhů, tzn. poměr n-tého snímače vůči prvnímu pro systém s laděnou odbočkou ku poměru n-tého snímače vůči prvnímu u systému bez odbočky. Zmíněný průběh lze shrnout do následujícího vztahu:  $(p_{n,lo}/p_{1,lo})/(p_{n,tr}/p_{1,tr})$ , kde  $p_{lo}$  je amplituda tlaku laděné odbočky a  $p_{tr}$  trubky bez LO. Příslušný graf lze vidět na obr. 2.8.

Poměry tlaků za odbočkou jsou pro snímače tři, čtyři a pět stejné a liší se s poměrem tlaku před odbočkou (snímač 2). Místa, která jsou v grafu pod hodnotou jedna, značí útlum, naopak nad hodnotou jedna dosahují amplitudy větší velikosti než s variantou bez odbočky (zesílení signálu). Z tohoto grafu je již patrný největší útlum v oblasti 1160 Hz.

Obrázek 2.8: Poměr podílů amplitud systému s LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu ku podílu amplitud systému bez LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu pro uzavřený konec potrubí a pro různé délky a průřezy

S rostoucí délkou laděné odbočky se snižuje frekvence útlumu. Pro délku  $L = 94$  mm je frekvence kolem 900 Hz a pro  $L = 114$  mm se snížila, až na 755 Hz, přičemž velmi podobné útlumy jsou i na 655 Hz a 855 Hz. Celkově lze u největší délky pozorovat velmi široké frekvenční pásmo (200 Hz), u kterého je amplituda kmitání menší, což není pro dynamický tlumič obvyklé. U dvou větších délek platí, že útlum je znatelný až za laděnou odbočkou. S rostoucím průměrem  $\phi d$  je v případě uzavřeného konce trend mírně vyššího útlumu a nepatrně širšího frekvenčního pásma tlumení.

Fázový digram lze vidět na následujícím obrázku 2.9. Je zobrazen rozdíl fází  $n$ -tého snímače a prvního snímače. Z grafu lze vidět, že při změně průměru se fázové spektrum pro dané délky mění minimálně, mírně se rozšiřují úseky mezi vlastními frekvencemi (VF) v oblasti naladění odbočky. Při přejíždění vlastní frekvence se rozdíl fází mění rychleji (vysoká velikost směrnice v grafu). VF jsou vyhodnoceny velmi podobně pro všechny snímače. Oblast přeladění systému lze pozorovat na místech, kde dochází k "ostré" změně průběhu fáze (nejedná se však o změnu v důsledku překročení hranice  $\pm 180^\circ$ ).

### Otevřený konec

U otevřeného konce je situace mírně složitější než u uzavřeného konce, protože budou navíc porovnávány výsledky mezi tlakovou OP a podmínkou kritického odporu. V následujícím grafu 2.10 jsou zobrazené přímo poměry podílů amplitudy tlaku  $n$ -tého snímače vůči prvnímu pro soustavu s rezonátorem v poměru k podílu amplitud tlaků systému bez odbočky. Pro podmínku impedance jsou poměry amplitud u systému bez odbočky velmi blízké číslu jedna, proto nemá smysl vykreslovat graf s oběma průběhy (bez a s LO). Amplitudy jsou blízké jedné, protože systémem se šíří tlaková vlna, která se neodráží zpět do potrubí. Naopak na konci pokračuje ven ze systému.

### 2.3. VYHODNOCENÍ

Obrázek 2.9: Rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače pro systém s LO a uzavřeným koncem

Obrázek 2.10: Poměr podílů amplitud systému s LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu ku podílu amplitud systému bez LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu pro otevřený konec potrubí, různé délky, průřezy a pro tlakovou a impedanční podmínku

Poměry pro snímače  $n=3, 4$  a  $5$  jsou téměř totožné jak tomu bylo v případě uzavřeného konce a liší se velmi nepatrně. U snímače před odbočkou je průběh samozřejmě odlišný.

Pro variantu L74d75 s tlakovou podmínkou jsou dva nejvýraznější vrcholy na frekvencích  $1110$  Hz a  $1160$  Hz, celá oblast mezi zmíněnými frekvencemi je také značně utlumená. U podmínky impedance je nalezená frekvence shodná s druhým vrcholem ( $1160$  Hz), avšak

útlum mimo naladění v jeho okolí je menší. Na druhou stranu okolní interval frekvencí, kde je znatelný alespoň mírný útlum, je větší.

Obecně platí jako u uzavřené trubice, že s rostoucím průměrem  $\phi d$  roste i efekt tlumení pro frekvenci naladění a tlumené frekvenční pásmo se nepatrně zvětšuje. Frekvence naladění u ostatních geometrií sedí s teoretickými hodnotami, až na případ tlakové podmínky s délkou 114 mm. Ačkoliv je na 755 Hz znatelný útlum, není největší. Výraznější útlum je na frekvencích 805 Hz a také na 605 Hz. I přesto lze pozorovat tlumenou širší oblast frekvencí právě v okolí 755 Hz.

Na fázovém diagramu 2.11 je možné u tlakové podmínky vidět, jak se v oblasti naladění zvětšují intervaly mezi fázovými přechody, podobně jako u uzavřeného konce. Při pod-

Obrázek 2.11: Rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače pro systém s LO a otevřeným koncem

mínce impedance lze vidět u každého snímače jinou fází, což je způsobeno běžící vlnou, která na konci pouze vystupuje ven ze systému. U obou podmínek dochází ke znatelnému ovlivnění průběhu fází v oblasti frekvencí naladění rezonátoru.

V následující tabulce jsou zapsány zjištěné frekvence naladění pro různé délky LO a všechny tři OP. Navíc je přidána ke každé délce teoretická hodnota dle vztahu (2.9) s uvažovanou rychlostí zvuku  $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jelikož frekvence jsou pro různé průměry velice podobné, nebude rozepsán tento parametr, aby tabulka neobsahovala duplicitní informace.

Tabulka 2.2: Frekvence naladění získané z analytických výpočtů

délka $L$ (mm)	teoretická fr. (Hz)	uzavřený (Hz)	otevřený - tlak (Hz)	otevřený - impedance (Hz)
74	1158,8	1160	1110	1160
94	912,2	860	910	910
114	752,2	755	805/605	755

### 2.3. VYHODNOCENÍ

Dle analytických výpočtů vychází frekvence velice podobná teoretickým hodnotám. Téměř ve všech případech je možné pozorovat zvyšování velikosti útlumu a frekvenčního intervalu v místě naladění, při rostoucím průměru  $\phi d$ . Největší ovlivnění průběhu v porovnání s případem bez odbočky je v okolí naladění, okraje intervalu se změnilo výrazně méně.

Ačkoliv byly diskutovány hlavně oblasti útlumu ve frekvenčním spektru, objevují se i místa, kde naopak rezonátor amplitudu signálu zesílil. Oblasti zesílení se vyskytují jak v přímém okolí s tlumenými frekvencemi, tak i ve zbytku celého spektra.

Díky fázovým diagramům lze pozorovat, když je mýjena vlastní frekvence. Při přeladění systému se změni i fázové spektrum a je možné odhadnout místo naladění rezonátoru.



### 3. Numerické řešení

Dalším způsobem řešení tlakových pulzací je použití specializovaného softwaru. V této práci je použit *Ansys Acoustics*, který je založen na řešení pomocí metody konečných prvků (MKP). Konkrétně se jedná o modul *Harmonic Acoustics*, který se používá ke zjišťování odezvy lineárního systému, který je buzen harmonicky (tzn. pomocí sinusového průběhu) [2]. Často se modul používá k vykreslení frekvenční závislosti, čehož bude využito níže.

V akustice řešené pomocí Ansysu se podobně jako v předchozí kapitole vychází ze základních rovnic mechaniky tekutin. Použijí se rovnice kontinuity a Navier-Stokesova rovnice k vytvoření vlnové rovnice, přitom se zavádí následující předpoklady [3]:

- Tekutina je stlačitelná (hustota se mění v důsledku tlakových změn) a je nevířivá,
- nejsou uvažovány žádné objemové síly,
- tlakové pulzace jsou malé,
- střední rychlost tekutiny je nulová,
- plyn je dokonalý, chová se isoentropicky (pomocí vratné adiabaty).

Linearizovaná rovnice kontinuity má téměř stejný tvar jako rovnice kontinuity (1.14), je však přidán člen vyjadřující hmotnostní vybuzení tlakových pulzací (mass source) [3]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho a_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q_b}{\rho}. \quad (3.1)$$

$Q_b$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ ) hmotnostní zdroj pulzací (mass source).

V rovnici jsou uvažovány akustické veličiny (akustická rychlost a tlak), které souvisí s výchylkami od rovnovážné polohy, nikoliv absolutními hodnotami.

Linearizovaná Navier-Stokesova rovnice má opět podobný tvar s rovnicí (1.15) při uvažování Stokesovy hypotézy – výchozí nastavení pracuje s nulovou objemovou viskozitou. Navíc je přidán člen hmotnostního buzení.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{4\mu}{3\rho^2} \left[ -\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial Q_b}{\partial x_i} \right] \quad (3.2)$$

Postup odvození řídicí rovnice je podobný jako při teoretickém odvození. Z obou představených rovnic se vytvoří vlnová rovnice, která má při uvažování konstantní rychlosti zvuku následující podobu:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{4\mu}{3\rho a_0^2} \frac{\partial^3 p}{\partial x_i^2 \partial t} = -\frac{\partial Q_b}{\partial t} + \frac{4\mu}{3\rho} \frac{\partial^2 Q_b}{\partial x_i^2}. \quad (3.3)$$

Rovnice je až na pravou stranu rovna s rovnicí (1.33) při uvažování Stokesovy hypotézy. Členy na pravé straně představují hmotnostní zdroj tlakových vln.

Vlnová rovnice použitá v Ansysu je dále převedena do podoby vhodné pro výpočty s konečnými prvky. Je použita Galerkinova metoda – rovnice je vynásobena testovací

funkcí a zintegrována přes objem konečného prvku. Po dalších úpravách je možné rovnici převést do maticového tvaru. Jsou zavedeny akustické matice hmotnosti, tlumení, tuhosti, hranice akustické domény a zatížení. Vlnová rovnice v integrální podobě přejde do pohybové rovnice. Pohybová rovnice je již řešena za pomoci klasických metod MKP.

Výše představená vlnová rovnice uvažuje pouze s první dynamickou viskozitou, která je pro vzduch řádově menší než objemová či druhá viskozita. Aby bylo možné zahrnout objemovou viskozitu do výpočtu, je potřeba použít The Full Linear Navier-Stokes (FLNS) model, který zahrnuje do úvahy také viskózní a tepelné účinky. Tepelné účinky nebudou uvažovány, viskózní však ano. Ve FLNS modelu je tenzor napětí definován stejně jako v rovnici (1.18) [3]. Pro připomenutí je zde tenzor napětí uveden ještě jednou, nyní však není rozepsán tenzor rychlosti deformace  $v_{ij}$  a divergence rychlosti  $v_{kk}$ .

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij} + b\delta_{ij}v_{kk}$$

Vlnová rovnice díky tomu získá novou podobu a již uvažuje druhou dynamickou viskozitu.

Aby Ansys počítal s FLNS modelem, je potřeba použít kvadratické prvky a zadat nenulovou hodnotu první dynamické viskozity.

## Okrajové podmínky

Při simulacích budou využívány čtyři různé okrajové podmínky. Dvě podmínky budou použity vždy, další dvě pouze v případě otevřeného konce trubice.

První podmínka souvisí s buzením tlakových pulzací. Ve všech simulacích je použito buzení pomocí hmotnostního zdroje (mass source). Podmínku lze použít jak na objem, tak na povrch, hranu nebo i jednotlivý bod. V závislosti na zvoleném typu mohou být vytvářeny kulové, válcové nebo rovinné vlny. Se zvolenou geometrií se mění i jednotky hmotnostního zdroje. V této práci bude dále využita podmínka na plochu, budou se proto vytvářet rovinné vlny a jednotka mass source podmínky bude ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Ve vlnové rovnici je hmotnostní zdroj zobrazen na pravé straně za pomoci členů ( $Q_b$ ).

Velice často používanou je podmínka rigid wall = tuhá stěna. Pomocí této podmínky mohou být předepsány všechny plochy, které mají řádově vyšší tuhost než nosné médium, tzn. pevné stěny. Když je tato podmínka vyjádřena fyzikálně, jde o Neumannovu okrajovou podmínku nulové normálové rychlosti za jakékoliv situace ( $v = 0$ , podmínka ulpívání). Při zvolených podmínkách nedochází k dalšímu tlumení na stěně, je uvažováno pouze tlumení v médiu vlivem viskozity (jak první dynamické, tak i objemové). Podmínka pevné stěny je použita jak na stěny potrubí a laděné odbočky, tak i na uzavřený konec hlavního potrubí.

Třetí podmínkou je předepsání tlaku přímo na plochu. Díky tomu je možné předepsat nulový akustický tlak na výstupu z potrubí pro otevřený konec s tlakovou podmínkou.

Poslední využitou okrajovou podmínkou je podmínka neodrazivosti (podmínka kritického odporu/impedance) (2.6), která má stejnou podobu jako v předchozí kapitole. Je využita povrchová impedance

$$z = \frac{p}{v},$$

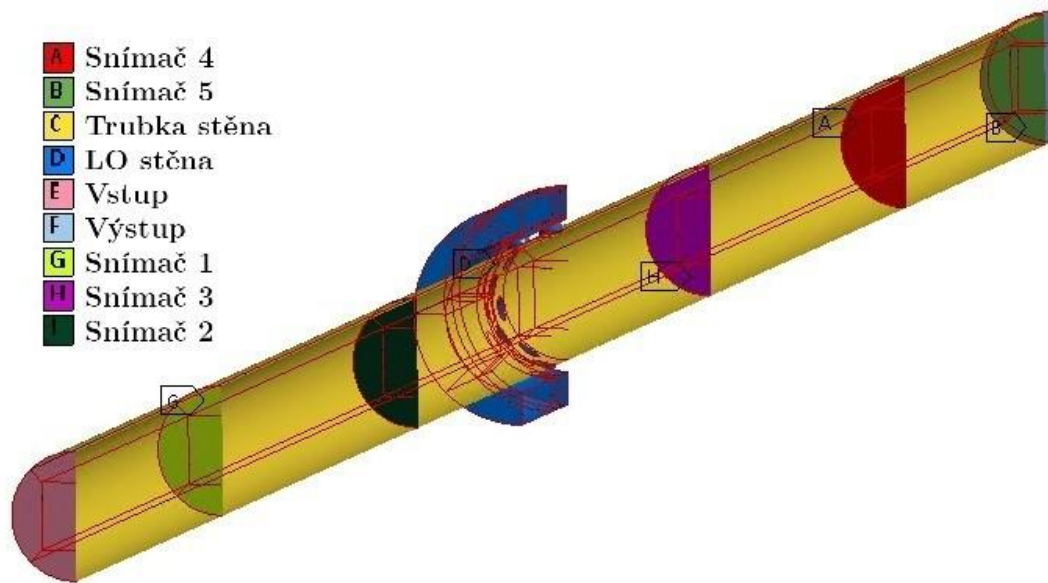
$z$  ( $\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ ) akustická impedance.

Pro rovinné vlny lze impedanci vyjádřit ze vztahu  $z = \rho \cdot a_0$  [3]. Podmínka značí, že na předepsané ploše je určitý odpor, který způsobuje ztrátu tlakové energie, a současně je zde

možné určité stlačení tekutiny (vzduch je zde schopen získat nějakou potenciální energii), takže výsledný tlak nebude obecně vždy nulový.

### 3.1. Geometrie a výpočetní síť

V programu Ansys byla vytvořena geometrie a síť, která koresponduje s návrhem na obr. 2.1. Modelována byla pouze oblast tekutiny a trubka včetně odbočky je realizována přes okrajové podmínky tuhé stěny. Návrh včetně dekompozice je zobrazen na následujícím podélném řezu 3.1. Byly vytvořené názvy geometrie (named selections), které jsou níže použity k předepsání okrajových podmínek a také na vyhodnocení tlaku v místech snímačů. Samotná dekompozice je lépe patrná z podélného řezu geometrie, který je zobra-



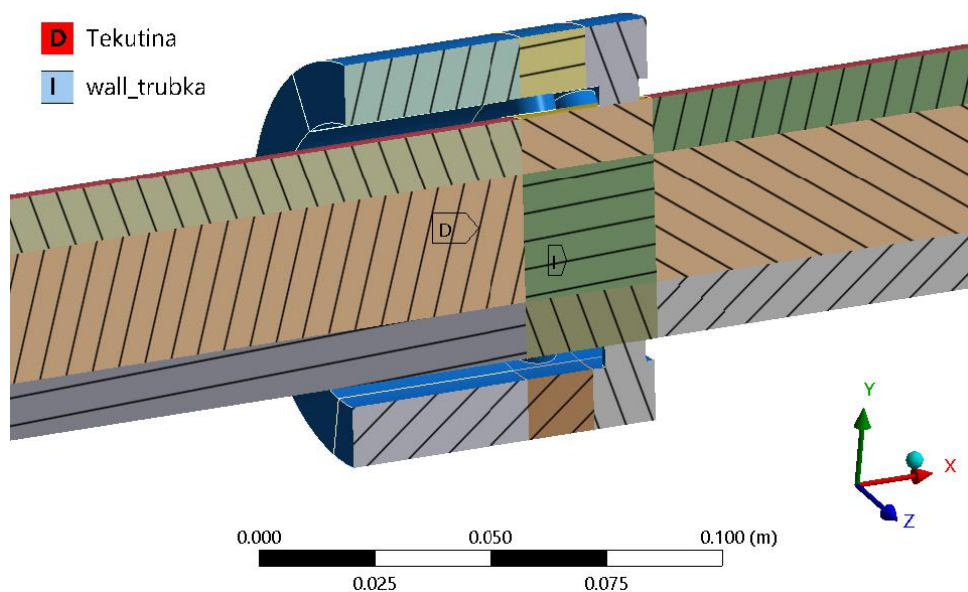
Obrázek 3.1: CAD model včetně názvů ploch

zen na dalším obrázku 3.2. Okolí laděné odbočky obsahuje velké množství dílčích částí, aby byla vytvořena optimální síť pro následný numerický výpočet.

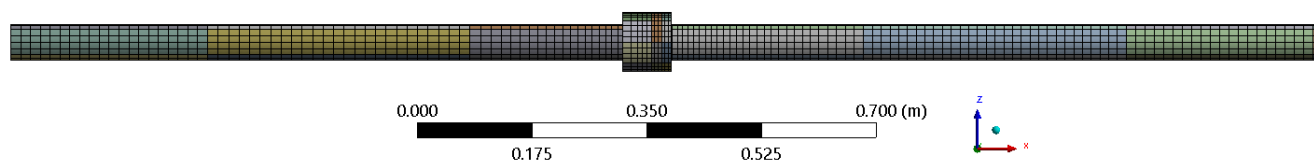
#### Výpočetní síť

Dle doporučení Ansysu je na zachycení tlakových vln postačujících dvanáct prvků na vlnovou délku, při použití lineárních prvků a šest elementů u prvků vyšších řádů [2]. Aby bylo možné využít FLNS model, je nutné použít kvadratické akustické prvky FLUID220 a nebo FLUID221 [2], stačí proto pouze šest elementů na jednu vlnovou délku. Nejvyšší zkoumaná frekvence je rovna 2 kHz, čemuž odpovídá vlnová délka  $\lambda_{2kHz} \doteq 0,1715$  m. Po délce hlavní trubice je vhodné použít alespoň 70 kvadratických prvků, v této práci bylo použito 144. Při použití takového počtu prvků se výrazně neliší čas řešení a zároveň je zaručeno, že průběh vlny je správně popsán. Celkový pohled na síť je zobrazen na obr. 3.3. Pohled zepředu a v příčném řezu místa laděné odbočky je možné vidět na dalším obrázku 3.4. V místě odbočky není síť úplně dokonalá, musely být použity čtyřstěny, dále elementy ve tvaru pyramidy a klínu. Tyto elementy jsou použity k napojení sítě hlavního potrubí na otvory v potrubí a také ve velmi blízkém okolí děr v oblasti laděné odbočky, jak je viditelné z obrázku 3.5. Oblast laděné odbočky obsahuje vyšší množství

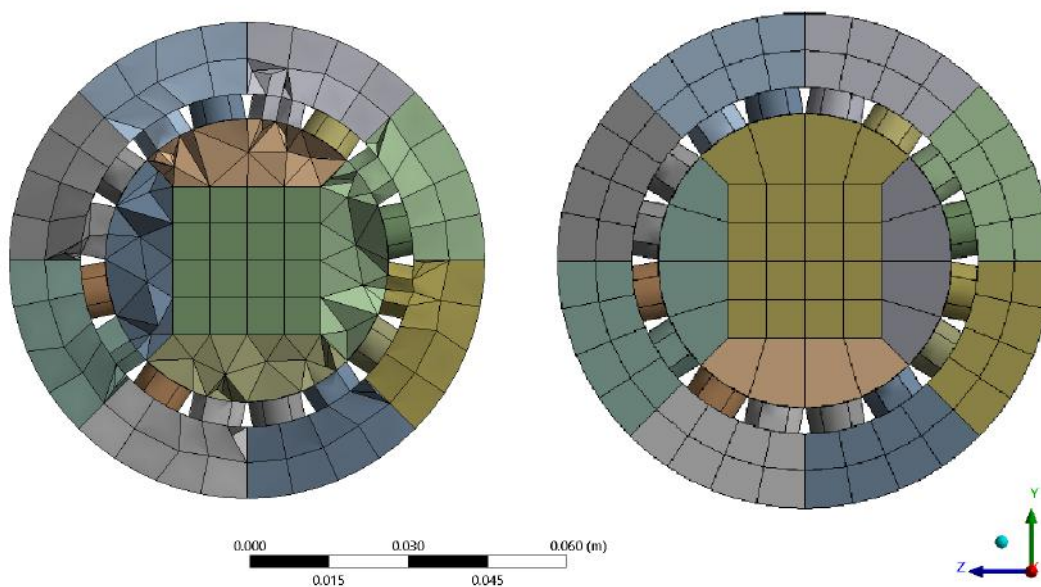
### 3.1. GEOMETRIE A VÝPOČETNÍ SÍŤ



Obrázek 3.2: Dekompozice geometrie v oblasti laděné odbočky – podélný řez

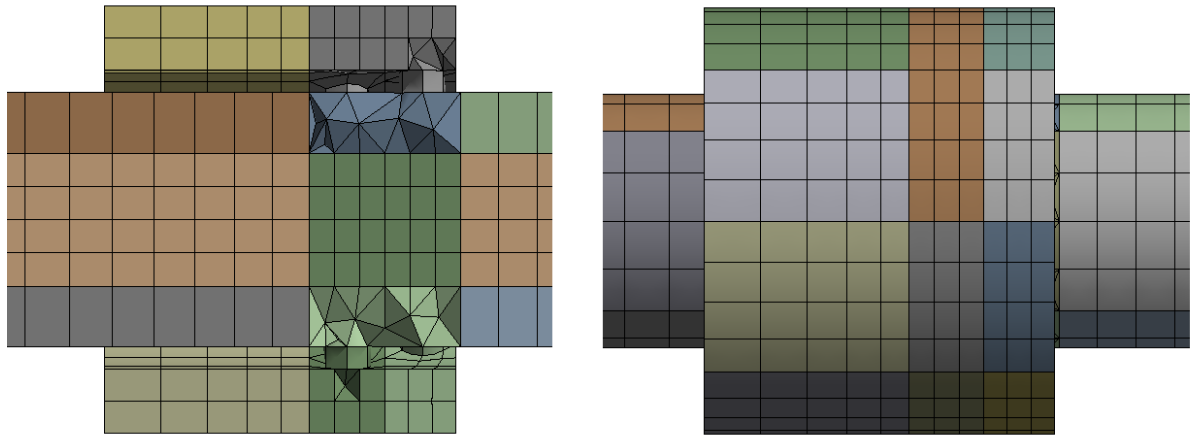


Obrázek 3.3: Celkový pohled na výpočetní síť



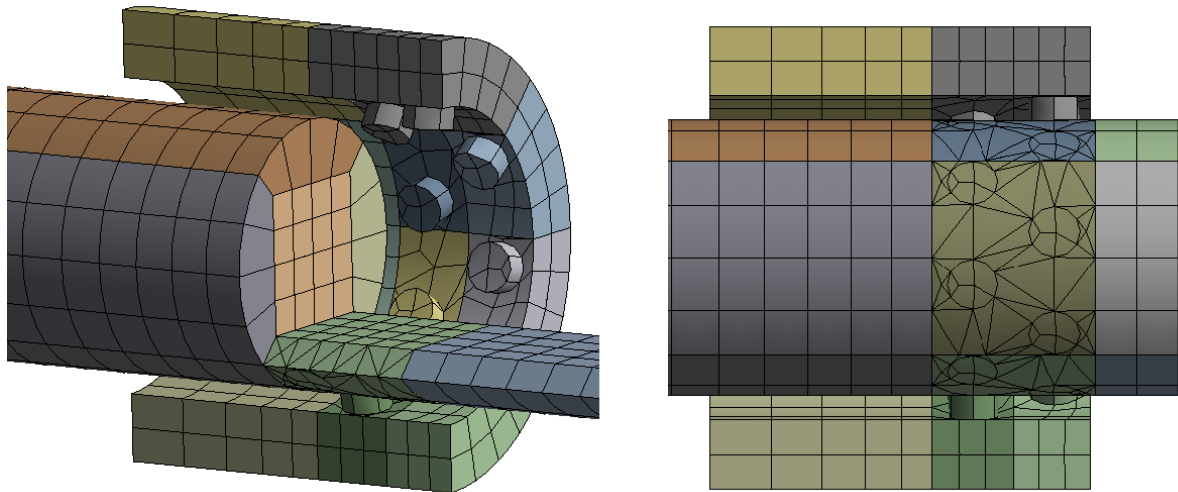
Obrázek 3.4: Síť příčného řezu v místě laděné odbočky (nalevo) a síť z pohledu zepředu (napravo)

prvků než je po délce hlavního potrubí. Protože je použita síť hustší než ve zbylé části domény, je ovlivnění použitím méně vhodných elementů minimální. Na posledním obrázku sítě 3.6 jsou některé dílčí části neviditelné, aby bylo možné pozorovat síť na povrchu hlavního potrubí, na přechodu mezi hlavním potrubím a dírami a na vnitřním povrchu



Obrázek 3.5: Pohled na výpočetní síť odbočky z boku při vnějším pohledu (nalevo) a na podélný řez v místě laděné odbočky (napravo)

laděné odbočky. Z pravé části obrázku je viditelné, jak se síť na povrchu hlavního potrubí



Obrázek 3.6: Pohled na výpočetní síť tetrahedrální síť s využitím zneviditelnění některých vnitřních částí tekutiny – síť na vnitřním povrchu laděné odbočky a děr (nalevo) a na vnějším povrchu hlavního potrubí (napravo)

přizpůsobila poloze děr. Díry sice mají po výšce pouze jeden element, ale vzhledem k jejich rozměrům je daný popis více než dostatečný.

Vzniklé síť bylo dosaženo předepsáním vhodného počtu buněk po délce hran dílčích částí díky dekompozici geometrie, použitím vhodné síťovací metody a předepsáním mapované sítě na povrchy, u kterých je požadována čtyřúhelníková síť se stejným vzorem.

Celá akustická doména obsahuje pouze prvky, které jsou vyšších řádů. Kromě oblastí v okolí děr jsou použity čistě hexahedrální prvky a síť je tam konformní a strukturovaná. Celá síť má přibližně 30 000 elementů v závislosti na délce a průřezu laděné odbočky, protože pro zvětšující se rozměry jsou úměrně přidávány také elementy.

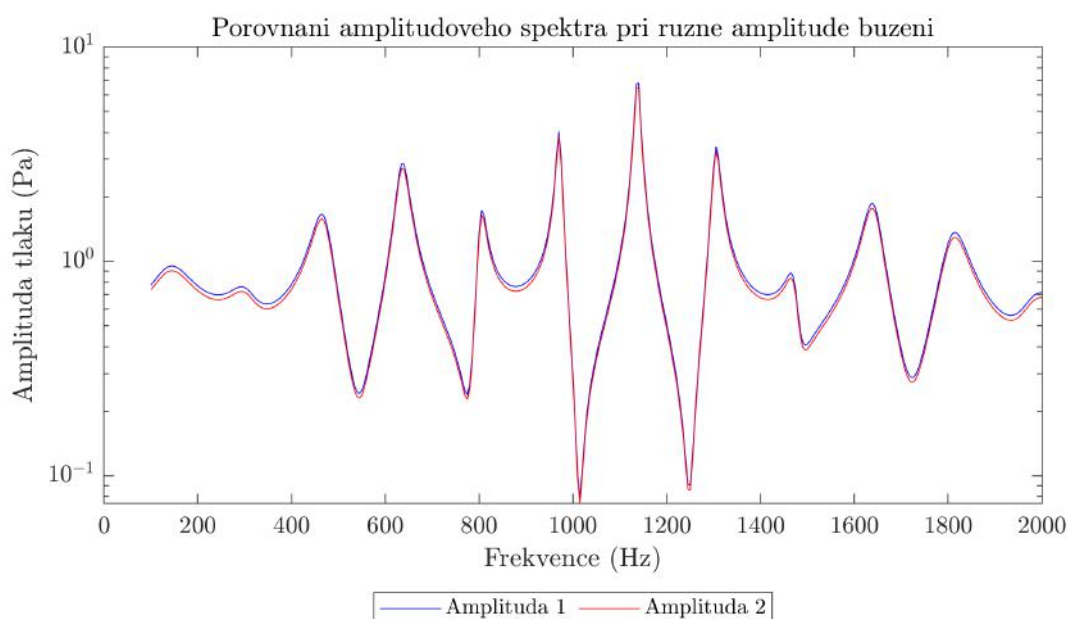


## 3.2. Nastavení a řešení

Ještě před samotným spuštěním výpočtu bylo potřeba určit, pro které frekvence bude výpočet probíhat a charakterizovat buzení, okrajové podmínky, materiálové vlastnosti a nastavení ostatních parametrů.

Nejdříve je vhodné nastavit množinu frekvencí, která se bude vyhodnocovat. V tomto případě byla zvolena spodní hranice intervalu frekvence 95 Hz a horní 2 kHz, přičemž interval se rozdělí na 381 stejných úseků. První vyhodnocovaná frekvence připadá na 100 Hz s krokem po 5 Hz do 2 kHz, což odpovídá zvolenému rozsahu v celé práci.

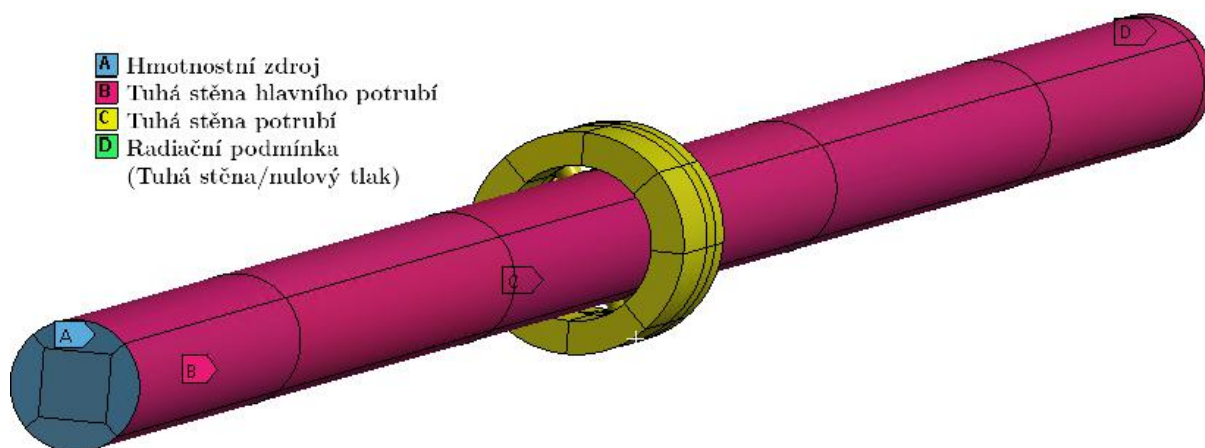
K vybuzení tlakových pulzací je použita hmotnostní podmínka (mass source). Při volbě amplitudy buzení je prakticky jedno, v jakých řádech bude podmínka zadána, protože se při vyhodnocení vytvoří poměr vůči amplitudě na místě prvního snímače. Pro dvě různé amplitudy vychází stejná amplitudová spektra, hodnoty se liší násobně k zadané amplitudě. Pro názornost je zde uveden příklad na následujícím obrázku 3.7. Amplituda 1



Obrázek 3.7: Porovnání tvaru amplitudového spektra při použití dvou různých amplitud

hmotnostního zdroje pulzací měla  $1000\times$  větší hodnotu než amplituda 2, která byla po numerickém výpočtu v Ansysu pronásobena konstantou 950, aby byl lépe zřetelný průběh ve srovnání s předchozí variantou. Při vynásobení amplitudy 2 (viz obr. 3.7) hodnotou tisíc se obě křivky překryly a byla viditelná pouze jedna, proto jsou hodnoty mírně odlišné. Navzdory tomu, že do programu lze zadat jakkoliv vysokou hodnotu buzení, použitý model předpokládá pouze malé tlakové pulzace.

Jak již bylo popsáno výše, na povrch akustické domény, kde je zvnějšíku potrubí nebo materiál obklopující prostor laděné odbočky, byla předepsána podmínka tuhé stěny. Stejná podmínka byla použita pro uzavřený konec potrubí na výstupu. Naopak pro otevřený konec potrubí byla zvolena podmínka neodrazivosti (radiation boundary) nebo nulového tlaku. Okrajové podmínky pro volný konec s impedanční podmínkou jsou zobrazeny na obr. 3.8. Pro zbylé dvě podmínky se změnila pouze podmínka D, ostatní podmínky zůstanou stejné.



Obrázek 3.8: Okrajové podmínky použité při numerické simulaci

Z materiálových vlastností je pro každý akustický materiál nutno zadat alespoň rychlost zvuku a hustotu, aby mohl být proveden nějaký výpočet. Pro zahrnutí viskózních účinků se dále zadává součinitel tepelné vodivosti, měrná tepelná kapacita vzduchu za konstantního tlaku a objemu, dynamická viskozita, případně objemová viskozita. Všechny hodnoty jsou předpokládány za konstantní až na objemovou viskozitu, která je frekvenčně závislá dle vztahu (5.7)

V Ansysu je možné zadat frekvenčně závislou objemovou viskozitu přes vztah nebo tabulku. Vzhledem k tomu, že vztah je v rámci programu vnitřně převáděn na tabulku hodnot, bylo zadání provedeno přímo pomocí tabulky.

Samotný výpočet jedné varianty je relativně rychlý. Při použití přímého řešiče (Sparse solver), který se doporučuje pro soustavy do 50 000 stupňů volnosti, trvá výpočet několik minut. Při velkém počtu elementů bývají problémy s RAM pamětí, proto se v takových případech využívá iterativního řešiče. Vytvořená soustava má okolo 30 000 uzlů, není nutné přepínat na iterativní řešič. V tomto případě počet úzlů odpovídá počtům stupňů volnosti, protože pro každý uzel je předepsána pouze jedna tlaková rovnice. Pokud by byly do modelu zahrnuty i teplotní jevy či další viskózní jevy v okolí stěny, počet stupňů volnosti by násobně narostl s počtem dalších předepsaných rovnic v porovnání s počtem uzlů.

Vyhodnocování pro různé délky bylo možné udělat díky parametrizaci geometrie. Za pomoci parametrů se měnila délka a průměr odbočky spolu s počtem elementů tak, aby buňky na sebe plynule navazovaly, jak je viditelné např. z obr. 3.6. Z důvodu porovnání výsledků byla vytvořena také jednodušší geometrie bez laděné odbočky – rovná trubka o délce 2 m. Umístění snímačů zůstalo zachováno s původním návrhem. Výpočetní síť byla čistě hexahedrální, konformní z kvadratických prvků typu FLUID220, síť trubice se shoduje s výše představenou sítí v oblasti mimo laděnou odbočku. Okrajové podmínky a nastavení simulace jsou prakticky totožné, proto zde není varianta více popsána.

### 3.3. Výsledky simulací

Po výpočtu je možné zobrazit amplitudová a frekvenční spektra. Aby spektrum nebylo ovlivněné velikostí buzení, je stejně jako v předchozí kapitole průběh zobrazován v poměru k prvnímu snímači. Na následujícím obrázku 3.9 jsou zobrazeny poměry amplitud tlaku  $n$ -tého snímače vůči prvnímu pro uzavřený konec potrubí. Rovněž jsou zobrazeny

### 3.3. VÝSLEDKY SIMULACÍ

poměry pro variantu bez odbočky, aby bylo možné zhodnotit efekt rezonátoru. V grafu

Obrázek 3.9: Poměr amplitud tlaku  $n$ -tého snímače vůči amplitudě tlaku prvního snímače pro uzavřený konec

pro geometrii L74d75 lze vidět, že v oblastech na okraji frekvenčního spektra vychází poměry velice podobně pro obě varianty (bez odbočky a s odbočkou). Místo největšího útlumu není zcela patrné, avšak přibližně by šlo odhadnout, že se bude jednat o oblast v okolí 1410 Hz.

Provedený odhad byl pouze na základě vizuálního porovnání (metoda *kouknu a vidím*). Pro lepší zhodnocení frekvenční použitelnosti odbočky jsou vytvořeny poměry zobrazených křivek. Podobně jako v předchozí kapitole jde o poměry podílů amplitud s a bez LO, tzn. poměr amplitudy tlaku  $n$ -tého snímače vůči prvnímu u systému s laděnou odbočkou, který je vydělen poměrem amplitudy tlaku  $n$ -tého snímače vůči 1. pro přímou trubku bez odbočky. Hned na první pohled si lze všimnout, že poměry nejsou pro snímače tři až pět totožné, jak tomu bylo analytických výpočtů, stále jsou však velice podobné a místy se překrývají.

Místa největšího útlumu tlaku se u varianty L74d75 nachází na 1375 Hz a 1410 Hz, navíc je velmi utlumen celý interval mezi oběma hodnotami, proto by se dalo vyvodit, že odbočka je v tomto případě naladěna někde mezi oběma frekvencemi. Další výrazné snížení amplitudy tlaku jsou v okolích místech nalezené hodnoty: na 1170 Hz a 1580 Hz. Při pohledu na variantu s vyšším průměrem L74d90 je již výrazný útlum mezi 1135 Hz a 1170 Hz, kde by se naladění dle teorie dalo očekávat. U varianty s největším zkoumaným průměrem L74d110 se hledaná oblast největšího útlumu přesunula na 865 Hz. Zatlumení je patrné i na 1170 Hz, avšak je výrazně menší.

Na grafu 3.11 je zobrazen rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače systému s laděnou odbočkou.

Na základě fázového i amplitudového spektra je možné pozorovat, že s rostoucím průřezem (na rozdíl od analytického výpočtu) se snižuje frekvence naladění. Tohoto jevu lze pozorovat u všech tří zkoumaných délek. U větších průměrů se snižují velikosti útlumu,



Obrázek 3.10: Podíl amplitud systému s LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu v poměru ku podílu amplitud systému bez LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu pro uzavřený konec potrubí a pro různé délky a průřezy

Obrázek 3.11: Rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače pro systém s LO a uzavřeným koncem avšak zvyšují se rozsahy frekvenčního pásma, které vykazuje souvislý pokles amplitudy tlaku.

Přibližná frekvence naladění pro všechny délky a průměry je shrnuta v tabulce na konci této kapitoly 3.1. Nalezené frekvence naladění se obtížně vyhodnocovaly, protože

### 3.3. VÝSLEDKY SIMULACÍ

podobných hodnot poklesu tlaku mnohdy dosahovalo více míst. Při výběru frekvence byla vizuálně zhodnocena jak velikost útlumu, tak i šířka tlumeného pásma.

#### Otevřený konec

Na následujícím grafu 3.12 jsou zobrazené podíly poměrů amplitud tlaku systému s odbočkou a bez odbočky. Jsou zobrazeny varianty pro obě OP – tlaková i radiační (impedanční) podmínka. Pro lepší porovnání obou přístupů jsou přidruženy vždy stejné délky odbočky a průměry pro obě podmínky. Jiné zobrazení bylo vybráno na základě změny frekvence naladění pro různé průměry. Popis aktuální geometrie a podmínky lze nalézt v titulku grafu.

Obrázek 3.12: Podíl amplitud tlaku systému s LO pro n-tý snímač vůči prvnímu v poměru ku podílu amplitud systému bez LO pro n-tý snímač vůči prvnímu pro otevřený konec potrubí a pro různé délky a průřezy

Podobně jako v případě zavřeného konce i zde poměry z různých snímačů dosahují podobných hodnot a jednotlivé průběhy pro tlakovou podmínku již nejsou totožné. Rozdíly jsou ještě výraznější než u varianty uzavřeného konce potrubí. U radiační podmínky se průběhy snímačů číslo tři, čtyři a pět překrývají. To je způsobeno absencí ploch mezi LO a výstupem z trubice, které by tlakové vlny odrážely zpět do systému s jinou fází .

Frekvence naladění pro geometrii L74d75 odpovídá 1410 Hz. Ke stejnému výsledku se došlo jak z tlakové, tak radiační podmínky. Celkově u všech geometrií platí, že nalezená frekvence z tlakové a radiační podmínky se shoduje.

U tlakové podmínky lze pozorovat přechody přes vlastní frekvence (tj. zesílení a zeslabení signálu probíhá s určitým frekvenčním krokem až na oblast naladění), kdežto u radiační podmínky jsou poměry na okrajích intervalu blízké číslu jedna a výraznějších hodnot nabývají až v místě naladění.

Fázová spektra na obr. 3.13 jsou poskládána jiným způsobem než amplitudová. Nejdříve je zobrazena jedna délka s tlakovou podmínkou a různými průměry a poté až stejná délka

Obrázek 3.13: Rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače pro systém s LO a otevřeným koncem s radiační podmínkou a různými průměry. Z grafu lze vidět stejně jako u uzavřeného konce, že s rostoucím průměrem i délkou se frekvence naladění snižuje. Délka intervalu mezi přechody VF se v okolí FN zvyšuje s rostoucím průměrem. U radiační podmínky lze vidět, že na okrajích pozorovaného frekvenčního pásma jsou rozdíly fází pro snímače odlišné, naopak v oblasti naladění dochází k náhlým změnám a křivky se na sebe "nahustí". Při použití tlakové podmínky jsou přejezdy přes vlastní frekvence velice podobné pro všechny snímače.

V následující tabulce 3.1 jsou shrnuty přibližné frekvence naladění pro všechny zkoumané varianty OP, včetně teoretických hodnot dle vztahu (2.9). Pokud se v tabulce na jenom místě nachází více hodnot, znamená to, že obě hodnoty vykazují podobný útlum, příp. v závorce je znázorněn výraznější útlum na trojnásobné frekvenci.

Tabulka 3.1: Frekvence naladění získané z numerických výpočtů

délka $L$ (mm)	průměr $d$ (mm)	teoretická fr. (Hz)	uzavřený (Hz)	otevř. tlak (Hz)	otevř. impedance (Hz)
74	75	1158,8	1390	1410	1410
74	90	1158,8	1150	1135	1135
74	110	1158,8	865	880	880
94	75	912,2	1160	1165	1065
94	90	912,2	865/905	905	905
94	110	912,2	660/865	735	730
114	75	752,2	855	855	855
114	90	752,2	660/865	750	750
114	110	752,2	640	625 (1825)	625 (1825)

Numericky napočítané hodnoty frekvence naladění pro různé OP se pro stejnou geometrii příliš neliší. Teoretické hodnoty víceméně odpovídají variantám s průměry  $d_{90}$ .

### 3.3. VÝSLEDKY SIMULACÍ

Větší a menší průměry (d75 a d110) se od napočítaných pravděpodobně liší tím, že v teoretickém vztahu výpočtu frekvence naladění není přímo zahrnut průřez potrubí. Rovnice je určena k výpočtu klasické LO, která vzniká připojením přímé trubky menšího průřezu k hlavnímu potrubí. Tam se vlna šíří na konec odbočky, kde se odrazí a s jinou fází se vrací zpět. Zvolená geometrie v této práci je více komplexní a tlaková vlna musí nejspíše urazit u největších průřezů LO větší vzdálenost (u malého průměru kratší vzdálenost), proto nejsou hodnoty stejné. Navíc za délku odbočky  $L$  je považována axiální délka prostoru LO a není zohledněno samotné umístění děr.

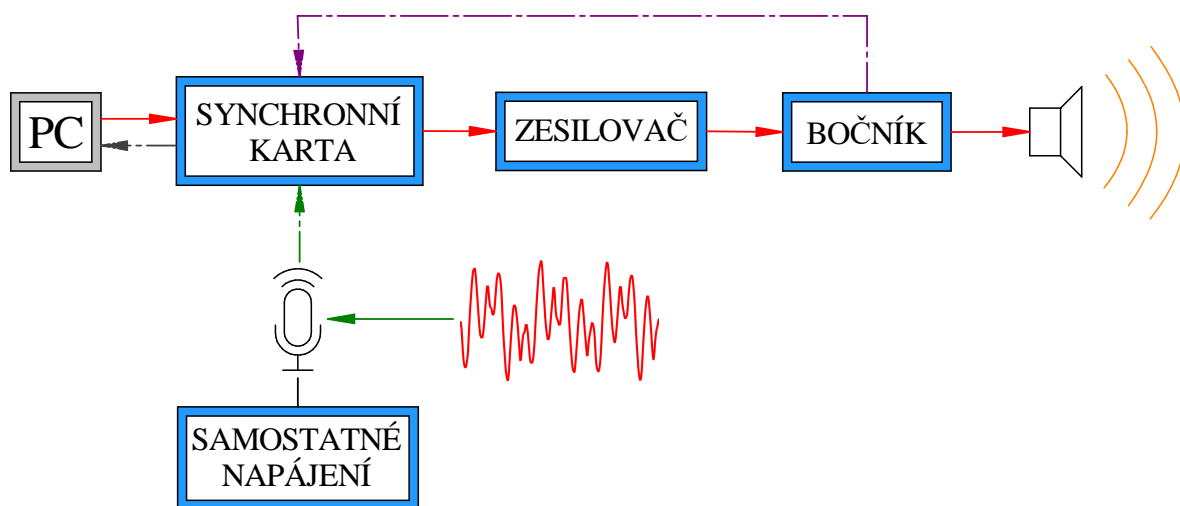
Při pohledu na průběh tlaku v závislosti na čase nebylo pozorováno šíření obvodových vln (vlna šířící se v prostoru odbočky po válcovém povrchu v tangenciálním směru), které by mohly ovlivnit frekvenci naladění.

## 4. Měření a vyhodnocování dat

Analytické a numerické řešení tlakových pulzací je určitým způsobem zjednodušený přístup. Výpočet byl proveden na základě matematického modelu, ve kterém byla zavedena některá zjednodušení a předpoklady. Jelikož zavedený model nemusí být zcela vhodný, je v rámci této práce provedeno také experimentální měření na potrubním systému s laděnou odbočkou a porovnání výsledků analytického, numerického a experimentálního přístupu.

Veškeré experimenty probíhaly za podobných podmínek, z toho důvodu jsou nejdříve představeny informace společné pro všechna měření. Je uveden způsob zapojení měřicí techniky a použité přístroje. V další části je popsán způsob vyhodnocování výsledků s využitím Fourierovy transformace, včetně pár užitečných fintiček. Na závěr této kapitoly je provedeno testování použitých mikrofoniů.

Způsob zapojení měřicí techniky je zobrazen na schématu 4.1. V počítači je pomocí



Obrázek 4.1: Schéma zapojení měřicí techniky

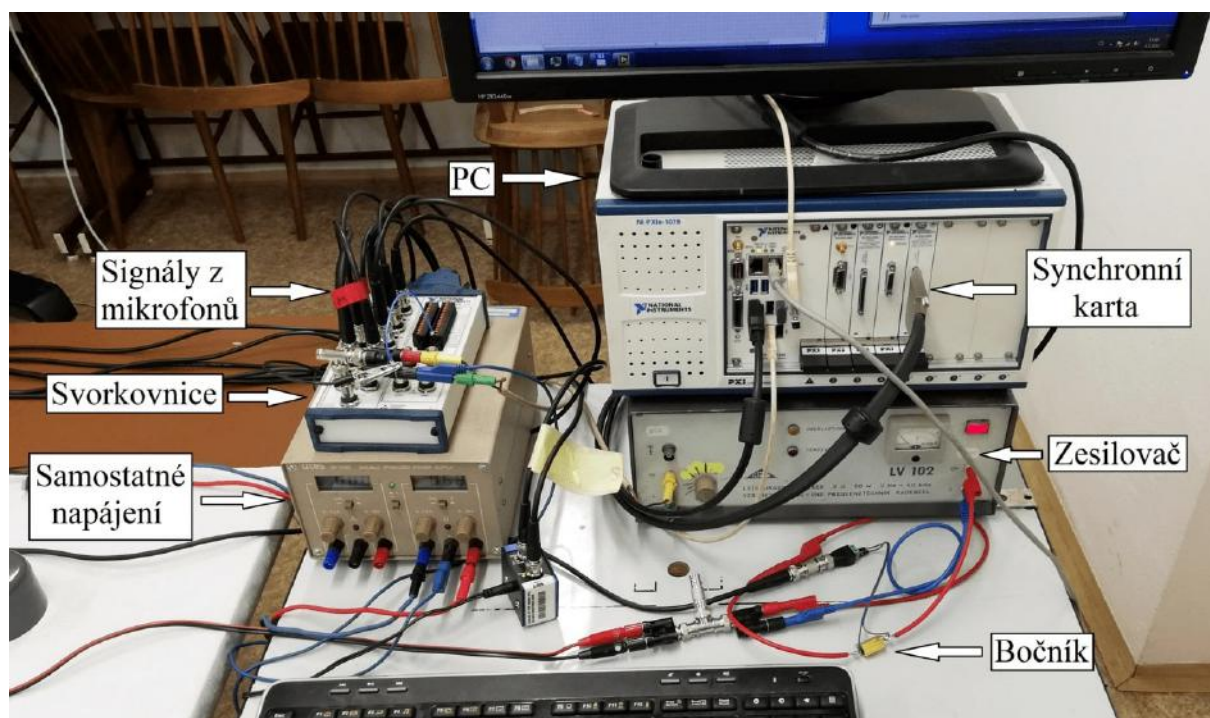
matematické funkce zformován harmonický signál, který měřicí karta digitalizuje a vytváří diskrétní signál popsany dostatečným množstvím bodů. Z výstupu měřicí karty je signál přiveden do výkonového zesilovače. Budicí signál dále prochází skrz bočnicový odpor o velikosti  $R_b = 1 \Omega$ , na kterém se realizuje úbytek napětí, který je přímo úměrný proudu. Tento úbytek napětí je přímo měřenou veličinou a spolu s ostatními signály akustického tlaku tvoří synchronní záznam prostřednictvím měřicí karty v počítači. Finálním prvkem, který převádí budicí signál na tlakové pulzace, je reproduktor.

Druhou část schématu tvoří vícečetné (šest pozic) měření akustického tlaku. Mikrofony jsou napájeny ze samostatného stabilizovaného zdroje napětí. Tlakové pulzace vytvořené za pomoci reproduktoru jsou mikrofony převedeny na elektrický signál (napětí) a svedeny na svorkovnici, přes kterou je zajištěno propojení s měřicí synchronní kartou, která je stejná jako v předešlém odstavci. Data z měřicí karty jsou ukládána v pevně stanovených časových intervalech a jsou zapsána do textového souboru s příslušným označením.

Fotografie skutečného zapojení z místa měření je na obr. 4.2. Snímač tlaku a reproduktor jsou zobrazeny na následujících fotografiích 4.3 a 4.4.

Představené uspořádání buzení a snímání tlaku je společné pro všechna měření. Polohy snímačů a reproduktoru se liší v závislosti na daném měření a jsou popsány níže (jiné

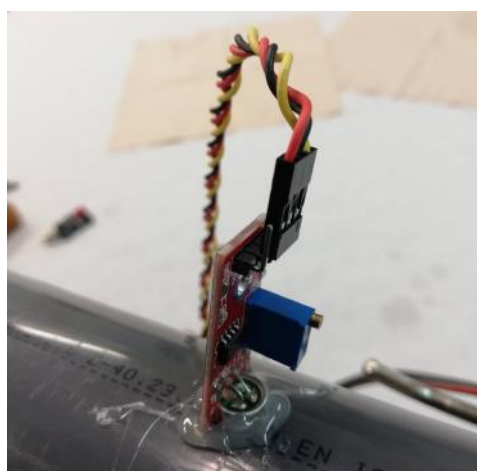
uspořádání pro testování než u samotného měření).



Obrázek 4.2: Reálná situace zapojení měřicí techniky



Obrázek 4.3: Reproduktor



Obrázek 4.4: Snímač tlaku

### Seznam použitých přístrojů

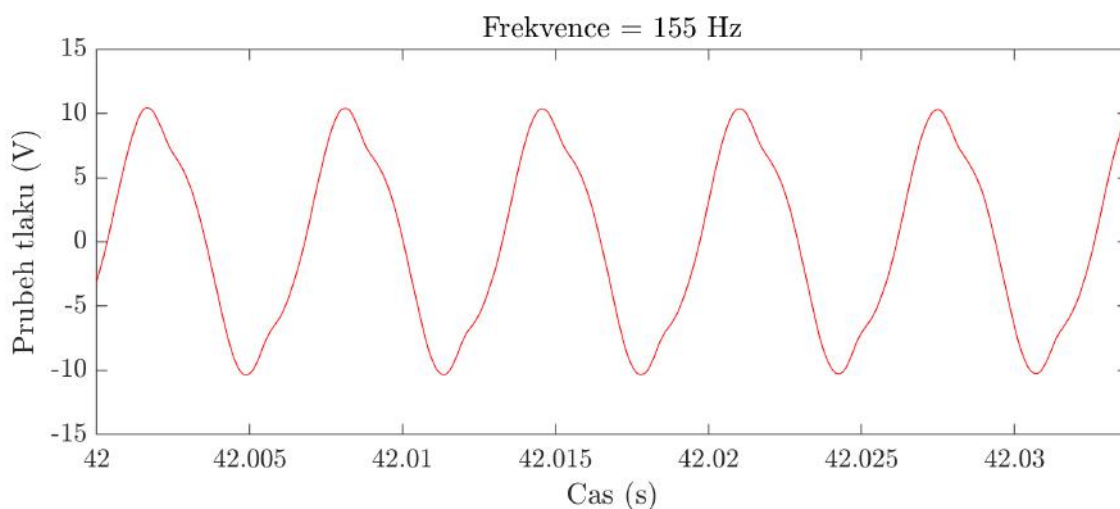
- Měřicí karta NI PXIe-6356
- Svorkovnice NI BNC-2110
- Stabilizovaný zdroj napětí Utes Brno BK 0182
- Zesilovač MMF LV 102 50W
- Drátový rezistor, THT, RX24-10W 5% 1R0

- 6×mikrofon Eses 1467272055
- Kalibrovaný snímač GRAS Type 40PH
- Reprodukční s parametry  $8\ \Omega$ , 7 W

### 4.1. Vyhodnocení časového signálu

Pro měření tlakových pulzací je využito snímačů tlaku = mikrofonů. Akustický tlak je převáděn na elektrický signál definovaný napětím. Hladina napětového výstupu u měřicích mikrofonů je na jiné úrovni než u kalibrovaného mikrofonu, proto při porovnání mezi sebou je nutné průběhy srovnat na stejnou úroveň. Mezi tlakem a napětím je přímá úměra, tudíž bude-li v této práci uveden tlak ve voltech, pak se jedná přímo o elektrický výstup z mikrofonu.

Výstupem z mikrofonů je časová závislost tlaku. Vzhledem k tomu, že k buzení bylo téměř výhradně použito harmonické buzení, měl by časový záznam odpovídat v ideálním případě harmonickému průběhu o jedné frekvenci s jednou amplitudou, případně signálu složeném z jedné frekvence včetně jejich násobků s různými amplitudami a fázemi. Reálný signál však není tak dokonalý, protože na soustavu téměř vždy působí alespoň minimální rušení z okolí a soustava jako taková obsahuje určité nedokonalosti. Reálný časový záznam několika period je možné vidět na následujícím obrázku 4.5. Průběh je periodický, nejedná



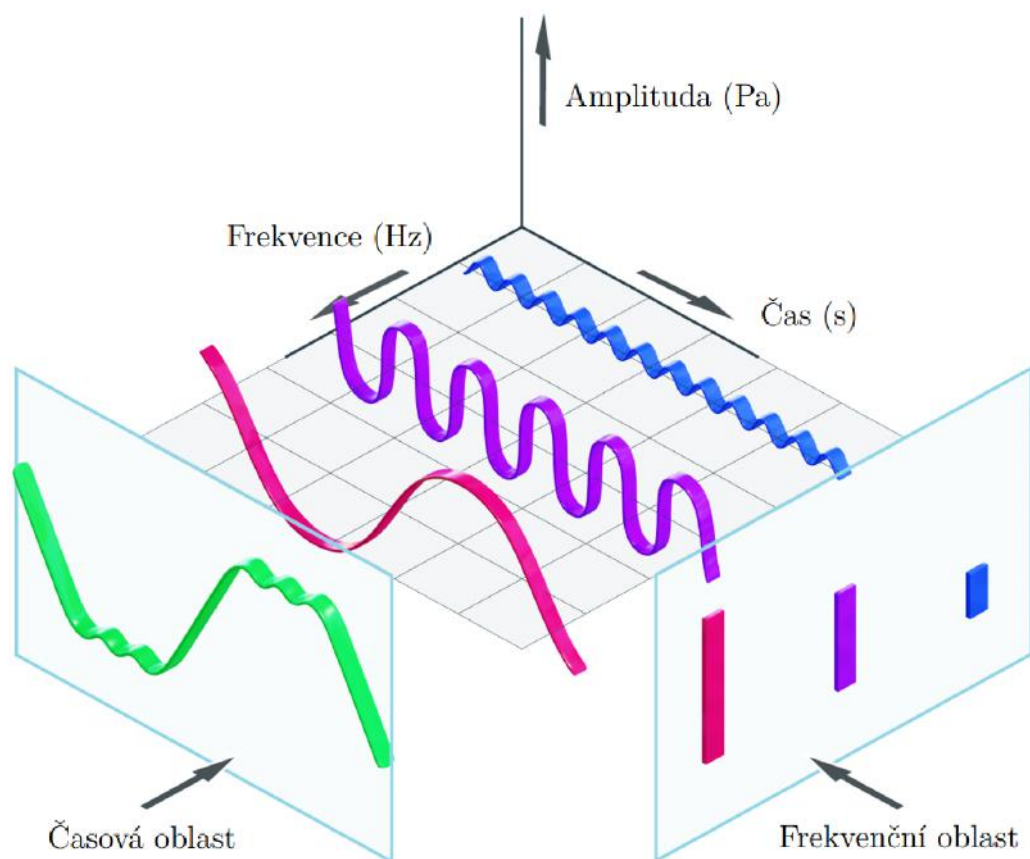
Obrázek 4.5: Časový průběh reálného signálu

se přímo o sinusový průběh, ale je mu velmi podobný. Signál je možné rozložit na řadu sinů a kosinů o různých amplitudách a frekvencích. Právě amplitudovo-frekvenční (také amplitudové) spektrum popisuje, jaké složky signál obsahuje. Časová i frekvenční oblast (spolu s informací o fázích) má své výhody a nevýhody – obě zobrazení jsou si přesto rovnocenná, jde jen o úhel pohledu na signál. Na dalším obrázku 4.6 je skvěle znázorněn pohled na signál z frekvenční a časové oblasti.

Časovou závislost je často velice jednoduché získat, naopak frekvenční oblast spolu s informací o fázích se používá častěji k dalšímu vyhodnocování. Přechod z časové do spektrální oblasti je možný díky Fourierově transformaci (FT), v obráceném případě se používá inverzní Fourierova transformace. Dle Fourierova teorému lze jakoukoliv periodickou funkci rozložit na nekonečnou řadu sinů a kosinů s příslušnými amplitudami

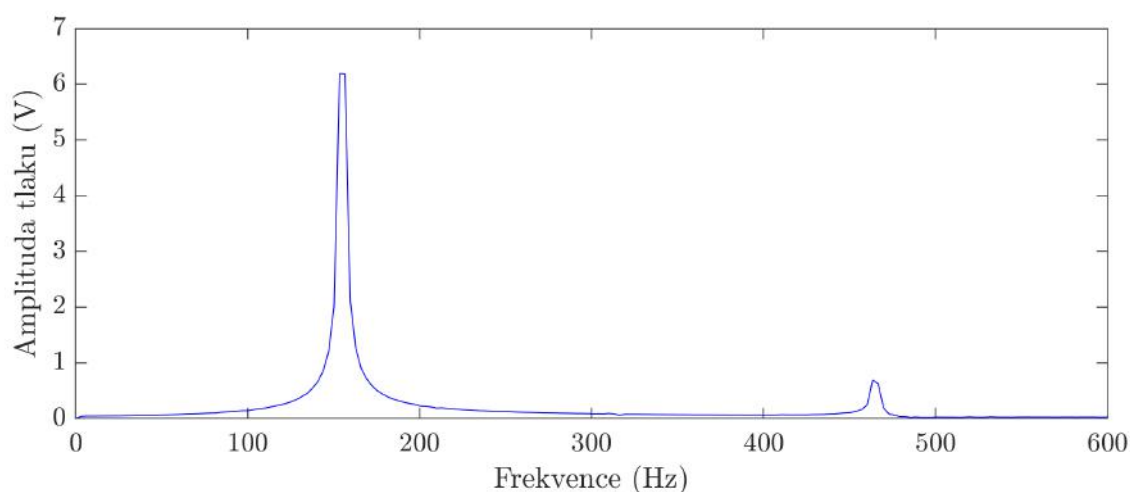


#### 4.1. VYHODNOCENÍ ČASOVÉHO SIGNÁLU



Obrázek 4.6: Znázornění pohledu mezi časovou a frekvenční oblastí [29]

a fázemi [28], čehož využívá FT. Aby bylo možné použít FT v její přímé podobě, je potřeba znát analytický předpis funkce, který je popsán přes celou časovou oblast, tj. od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Při práci s diskretním signálem, který se využívá v klasickém počítači a má konečnou délku záznamu, se používá rychlá Fourierova transformace (FFT). V Matlabu je možné FFT vypočítat za pomoci stejnojmenného příkazu. Časový záznam 4.5 po FFT přejde do frekvenční oblasti, kterou lze vidět na obr. 4.7.

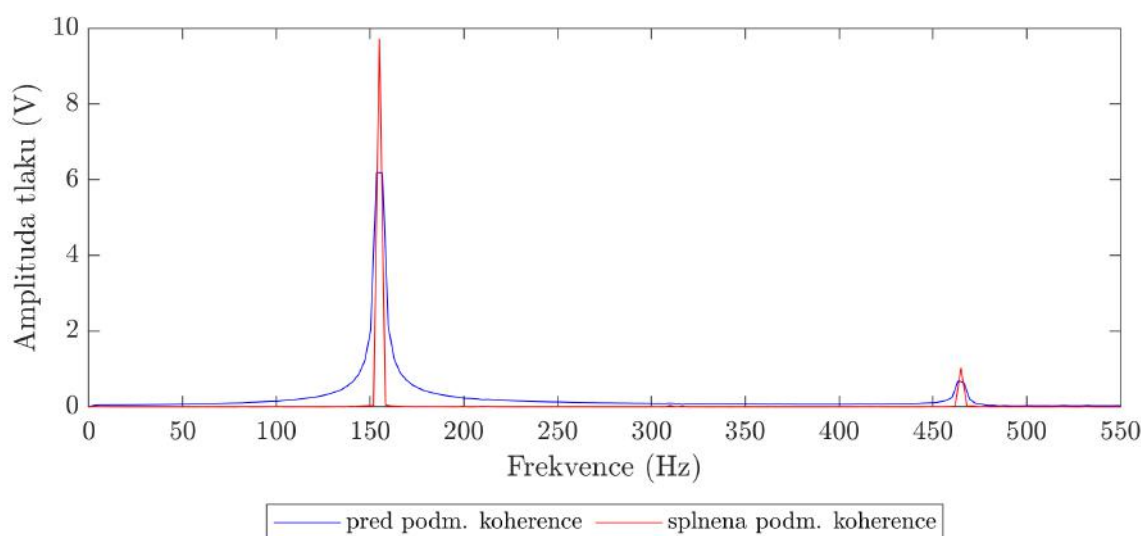


Obrázek 4.7: Spektrum reálného signálu



### Podmínka koherence

Na frekvenčním spektru 4.7 je možné vidět, že vrcholky průběhu jsou "useknuté". Tento jev je spojený s nevhodně zvoleným počtem vyhodnocovaných bodů (délkou záznamu). Použitá FFT předpokládá, že zvolený časový úsek se periodicky opakuje přes celou časovou oblast. Za předpokladu, že časový úsek na obr. 4.5 se periodicky opakuje, vzniká na rozhraní mezi jednotlivými úseky skoková změna průběhu, která ovlivní sinusový průběh a vyhodnocení signálu neproběhne ideálně. V okolí lokálního maxima se nachází dva body, které mají podobnou amplitudu. Skutečně hledaný bod však frekvenčně leží někde mezi oběma nalezenými body a má vyšší hodnotu amplitudy. Důsledkem jsou nepřesně vyhodnocené frekvence, amplitudy i fáze. Při správně zvoleném počtu pozorování časový průběh tlaku plynule navazuje, v takové situaci je splněna podmínka koherence<sup>1</sup> [30, 20]. Porovnání frekvenčního spektra pro nevhodně zvolený časový úsek a optimální časový úsek (se splněnou podmínkou koherence) je možné vidět na obr. 4.8. Při splnění podmínky



Obrázek 4.8: Porovnání frekvenčního spektra při splnění podmínky koherence a pro originálně zvolenou délku záznamu

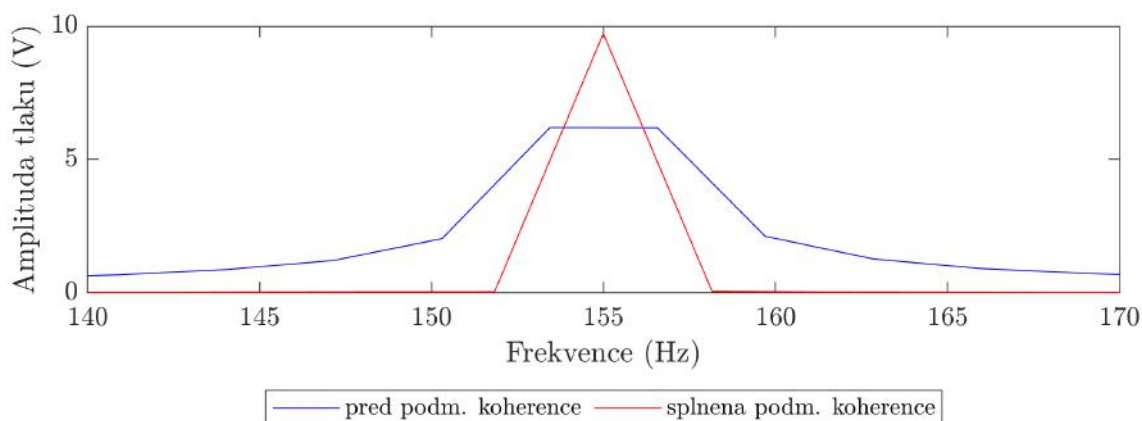
koherence je patrné, že vlastní frekvenci představuje pouze jeden bod, na rozdíl od druhého průběhu. V grafu je nejvýraznější první vlastní frekvence (1VF) na 155 Hz, méně výrazný vrchol je také na trojnásobné frekvenci (na 465 Hz). Ostatní zobrazené body jsou prakticky nulové. Detail první vlastní frekvence je zobrazen na dalším obrázku 4.9.

Určit vhodný počet hodnot je možné pouze pokud je předem známá vzorkovací frekvence, přesná hodnota frekvence signálu a jeho průběh je téměř dokonalý. Obecně nelze říci, že průběh signálu bude vždy podobný harmonickému, jak je znázorněno na obr. 4.5, z nějž lze na první pohled zhruba určit amplitudu, periodu i fázi. Průběh může být složitější, jako je např. na obr. 4.10. Na první pohled je patrné, že signál se periodicky opakuje – je možné určit perioda opakujícího se úseku a maximální hodnota tlaku. Další parametry lze na první pohled jen náhodně tipnout.

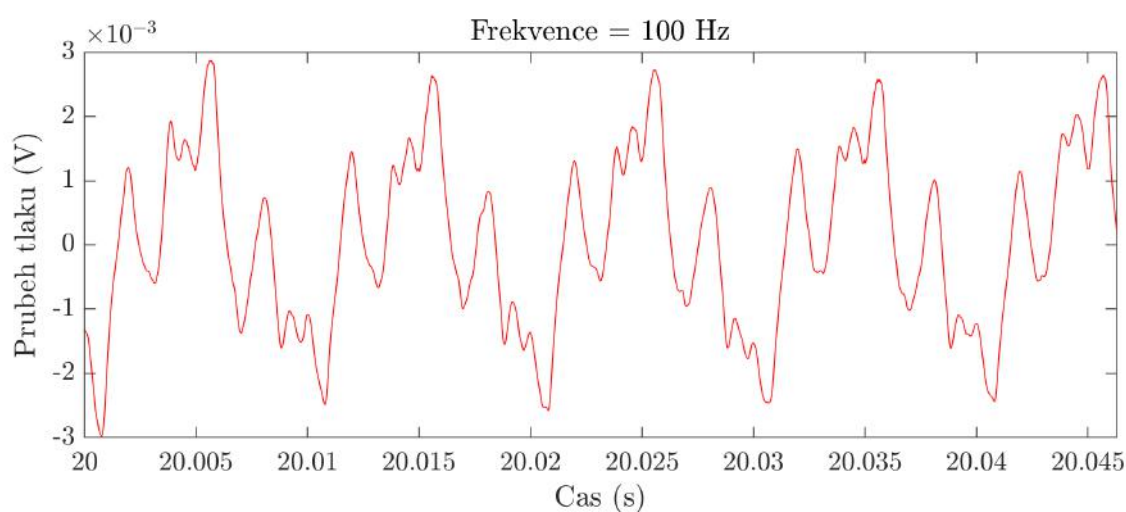
Z frekvenčního spektra zobrazeném v 4.11 je již patrné, že amplituda 1VF je na 100 Hz nejvýraznější, značné hodnoty dosahují i její liché násobky. Navíc se do signálu dostaly

<sup>1</sup>V cizojazyčné literatuře se pojem většinou objevuje pod názvem *coherent sampling*.

#### 4.1. VYHODNOCENÍ ČASOVÉHO SIGNÁLU



Obrázek 4.9: Detail první vlastní frekvence



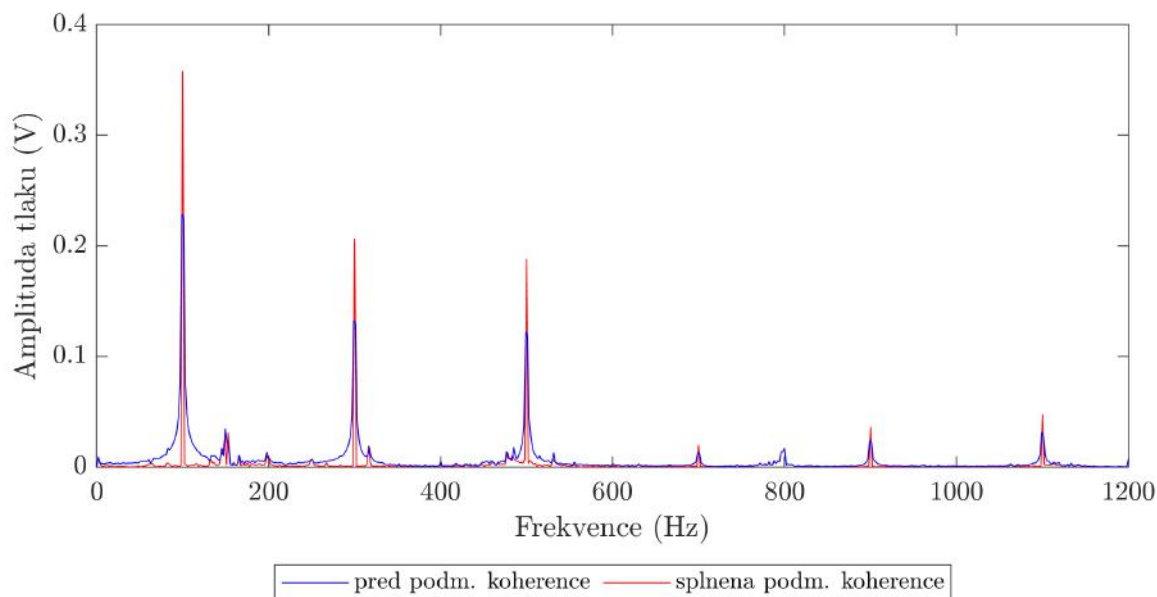
Obrázek 4.10: Složitý časový průběh reálného signálu

ještě další signály než jen primárně vybudzené, např. kolem frekvence 150 Hz. Ostatní rušivé složky nejsou v tomto případě nijak nadměrně výrazné.

#### Zpracování signálu

Frekvence budicího signálu se pohybovala od 100 Hz do 2 kHz s krokem po 5 Hz. Jelikož byla předem známá hodnota frekvence buzení, byla vytvořena hyperbolická funkce, která předepisuje počet pozorování v závislosti na frekvenci tak, aby zůstal zachovaný stejný počet kompletních period na celém intervalu frekvencí. S takto zvoleným počtem hodnot byla vyhodnocena FFT a nalezena maximální nenulová hodnota pro kalibrovaný snímač. Zároveň bylo ověřeno, jestli amplituda na třetinové frekvenci nedosahuje podobných hodnot (zda nebyla nalezena trojnásobná hodnota budicí frekvence). Amplitudy ostatních snímačů byly spočítány ze stejného časového záznamu, což bylo možné díky plně synchronnímu záznamu. Na základě nalezené budicí frekvence bylo vymezeno relativně úzké frekvenční pásmo, ve kterém by se měla nacházet přesnější hodnota frekvence.

Splnění podmínky koherence bylo provedeno pomocí postupného zkracování signálu až po délku celé periody. Při každém kroku byla vyhodnocena frekvence pro maximální amplitudu ve zvoleném frekvenčním pásmu a porovnána s nejvyšší již nalezenou. Maxi-



Obrázek 4.11: Frekvenční spektrum složitějšího časového průběhu

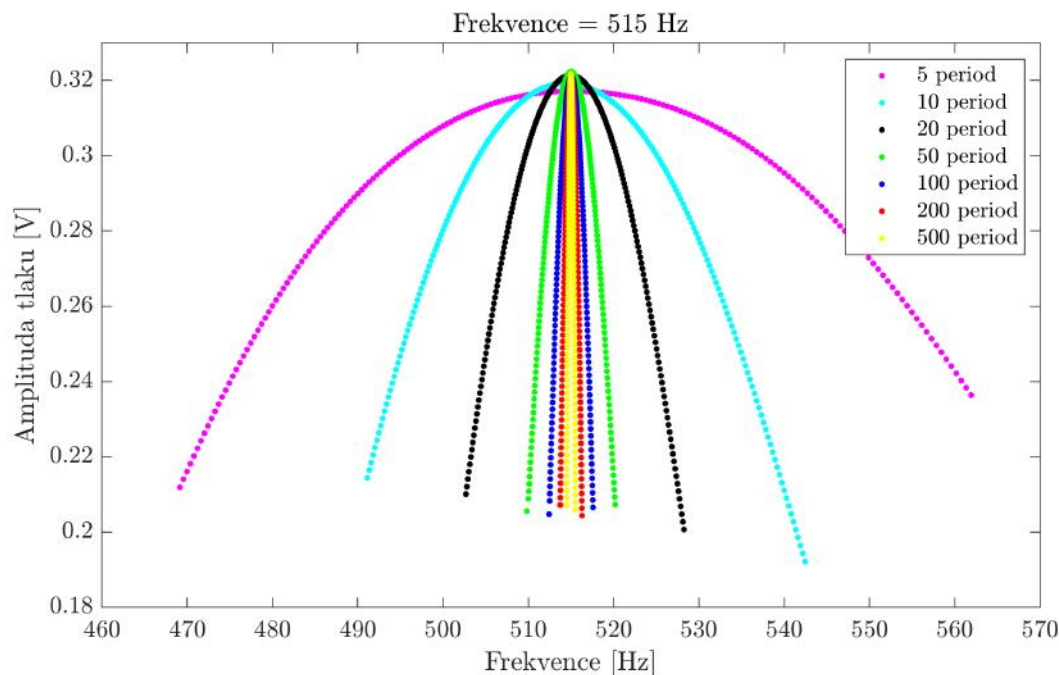
mální nalezená amplituda a jí příslušná hodnota frekvence byla považována za zpřesněnou hodnotu – byla splněna podmínka koherence.

Faktorem, který bylo možné do určité míry zvolit, byl počet vyhodnocovaných period signálu. S rostoucím počtem period by měla růst přesnost výpočtu, protože je vyhodnocován delší záznam. Na druhou stranu při zahrnutí příliš velkého počtu period roste výpočetní čas a hlavně mohou být brány v potaz jevy, které mají výrazně větší periodu děje než pozorovaný jev.

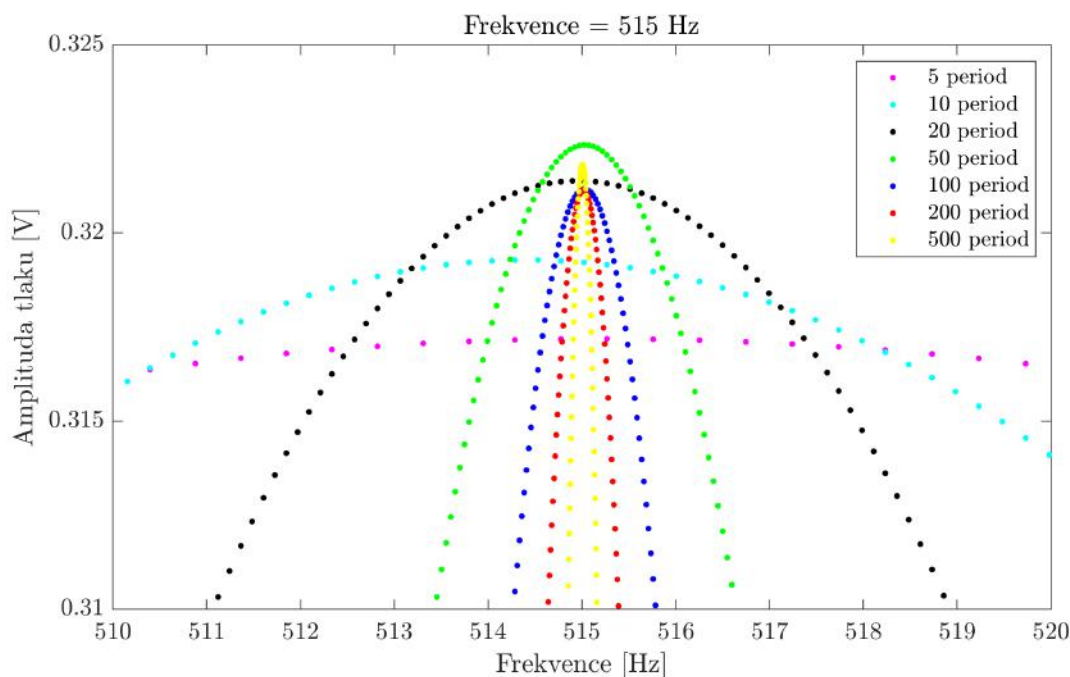
Pro jeden časový záznam s budicí frekvencí 515 Hz bylo provedeno vyhodnocení maximální amplitudy s postupným zkracováním délky časového úseku, přičemž nalezené maximální hodnoty byly vykreslovány. Vyhodnocení bylo provedeno pro různé dlouhé záznamy. Proces hledání spolu s porovnáním vlivu délky různě dlouhých záznamů je zobrazen na obr. 4.12. Počet vyhodnocení, tj. počet teček v grafu, je pro všechny varianty stejný. Z toho lze okamžitě usoudit, že s rostoucím počtem period se zužuje hledané frekvenční pásmo a přesnost nalezené frekvence se zvyšuje. Pro pět period bylo hledáno od cca 470 do 560 Hz, tj. interval hledání je 90 Hz. Pro 50 period se hodnoty frekvencí pohybují již od cca 510 do 520 Hz – interval je 10 Hz. Rozmístí-li se stejný počet hodnot na výrazně menší frekvenční interval, bude rozdíl mezi jednotlivými body menší, nalezená hodnota frekvence bude přesnější.

Jelikož v místě maxima se jednotlivé průběhy kříží a překrývají, je pro lepší přehlednost na dalším obrázku 4.13 zobrazen detail oblasti. Nejvyšší naměřená hodnota amplitudy byla vyhodnocena při použití 50 period, nejmenší pro pět period. Rozdíly amplitudy byly mezi délkami intervalu od 20 do 500 period relativně malé. Teoreticky nejpřesnější hodnotu by měl představovat průběh vyhodnocený přes 500 period, avšak při zvyšování počtu period amplituda nejdříve rostla, poté začala mírně klesat a nakonec opět trochu povyroستla. Přestože přesná hodnota amplitudy není známá, a proto není jasné, která hodnota je skutečnému bodu nejbližší, lze odhadnout, že velikost amplitudy se pravděpodobně pohybuje v okolí hodnoty 0,322. Hodnoty amplitud pro dva nejkratší záznamy se liší více, z toho důvodu bude použito alespoň 20 period.

#### 4.1. VYHODNOCENÍ ČASOVÉHO SIGNÁLU



Obrázek 4.12: Vyhodnocování podmínky koherence pro různě dlouhé časové záznamy



Obrázek 4.13: Detail okolí vlastní frekvence při vyhodnocování podmínky koherence pro různě dlouhé časové záznamy

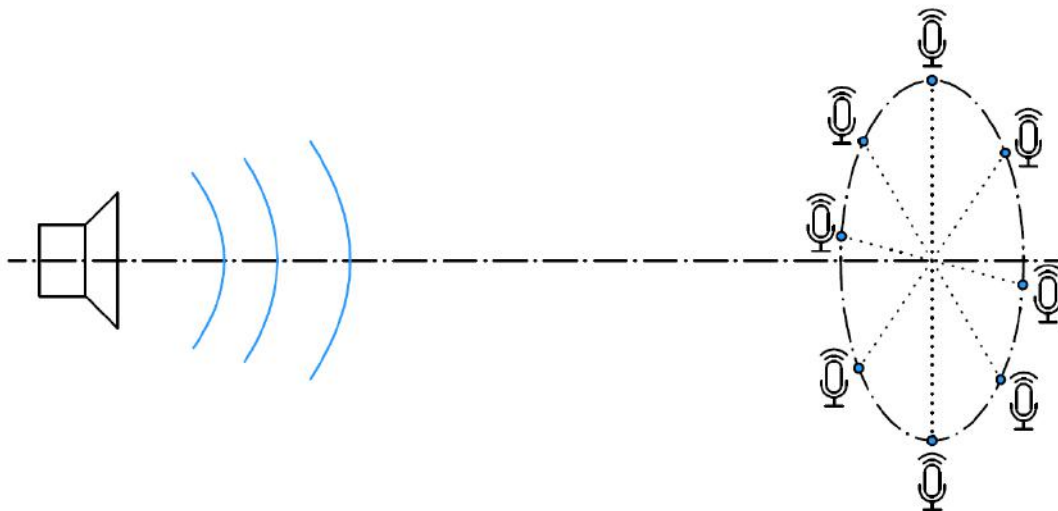
Otázka volby počtu period je velice zajímavá a zasloužila by další studii. Bylo by možné odhadnout, která varianta se nejlépe vyplatí. Zda má smysl provádět delší záznam a tím pádem i delší vyhodnocování nebo dostatečně přesné výsledky lze získat i z malého počtu period. Protože tato problematika není cílem této práce, je otázka ponechána otevřená.

V celé práci byla zvolena délka záznamu 50 period, protože čas vyhodnocení není nesmyslně dlouhý a frekvenční rozlišení bylo dostatečně přesné i pro vyšší frekvence.

## 4.2. Testování mikrofónů

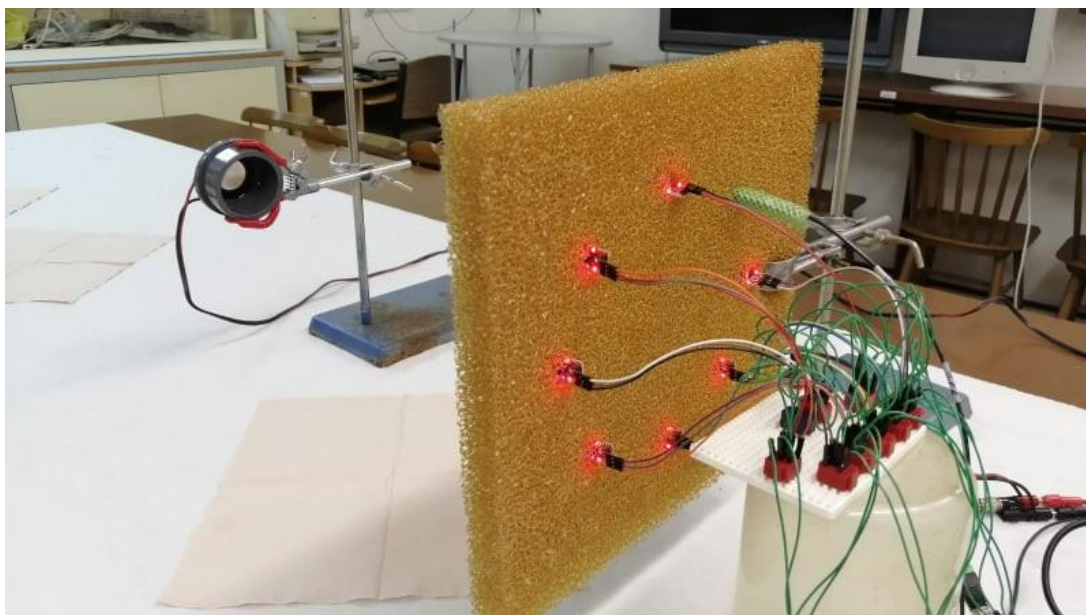
Dříve než bylo provedeno vlastní měření, byly odzkoušeny použité snímače a porovnány vůči kalibrovanému tlakovému snímači GRAS Type 40PH. Snímače byly rovněž porovnány mezi sebou.

První testování proběhlo na uspořádání znázorněném na následujícím schématu 4.14. Budič tlakových pulzací byl umístěn ve stejné vzdálenosti od všech snímačů, které se na-



Obrázek 4.14: Schéma prvního rozmístění snímačů při jejich testování

cházely rovnoměrně na kružnici. Jeden ze snímačů byl kalibrovaný, ostatní byly mikrofony Eses. Střed kružnice ležel na ose reproduktoru. Snímače byly umístěny v porézním materiálu, aby došlo k co největšímu pohlcení akustické energie a tlakové vlny nebyly odraženy zpět. Celkově porézní materiál měl zajistit co nejmenší ovlivnění snímačů. Na obr. 4.15 je fotografie z místa měření.



Obrázek 4.15: Skutečná situace při prvním testování



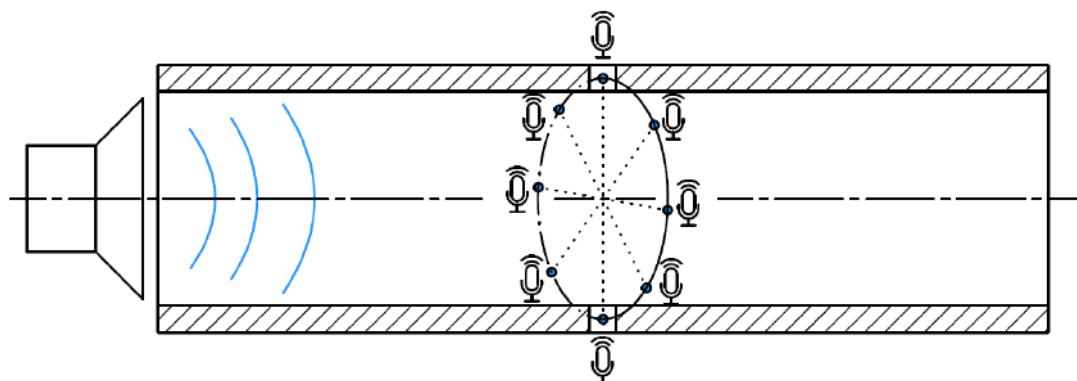
## 4.2. TESTOVÁNÍ MIKROFONŮ

Testování začalo vybuzením harmonického průběhu na frekvencích od 50 Hz do 2 kHz s krokem po 5 Hz pomocí reproduktoru. Zpočátku byl vyčleněn čas na ustálení stavu, poté proběhlo dvouvteřinové měření. Za pomoci programu byla navýšena frekvence a opět proběhlo ustálení a měření. Tímto způsobem bylo proměřeno celé zvolené frekvenční spektrum. Vzorkovací frekvence byla  $f_{vz} = 50$  kHz. Po proměření jednoho spektra bylo vytvořeno celkem 391 souborů, v každém z nich po 100 000 pozorování od všech snímačů. Stejný způsob buzení a snímání tlaku s totožnou vzorkovací frekvencí je uskutečněn i v ostatních experimentálních měřeních.

Po zpracování výsledků, které je blíže popsáno výše v sekci 4.1, se ukázalo, že signály nejsou složené jen z jedné frekvence, případně jejich násobků. Po porovnání frekvenčních spekter se u většiny snímačů objevila další výrazná složka, která nebyla primárně vybuzena. Mohlo se jednat o rušení z okolí od jiného zařízení (ventilátor počítače, zářivka, apod.), případně mohlo jít také o zachycení různě odražených a složených vln, protože měření probíhalo v uzavřené místnosti.

Ve stejném rozložení bylo pouze v tomto jediném případě místo reproduktoru použito buzení pomocí impulsu s použitím kovové pásovinu a trubky s proměřeným frekvenčním spektrem. V tomto případě byly porovnány frekvenční spektra snímačů vytvořená z časového záznamu impulsu. Ačkoliv byly výsledky mnohem lepší, stále bylo výrazné ovlivnění z okolí.

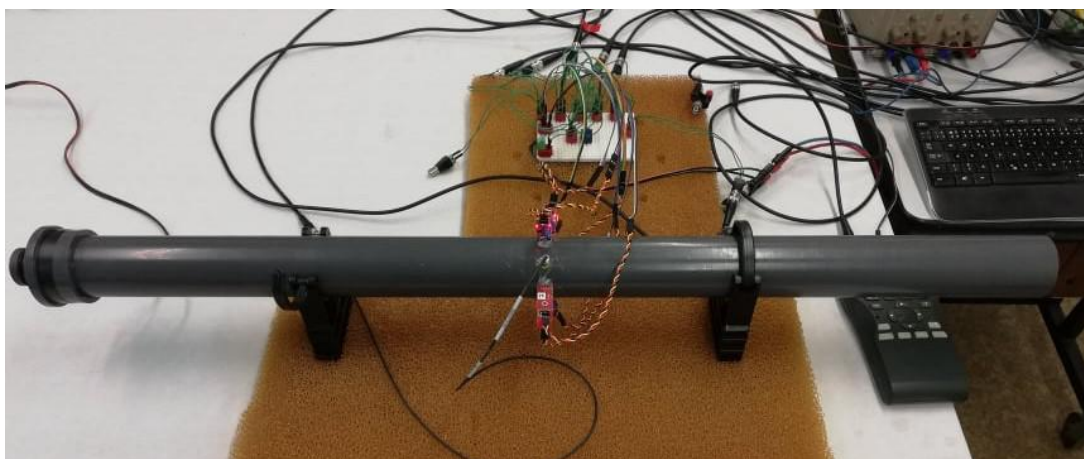
Druhý navržený způsob uspořádání při testování více odpovídal reálné situaci při měření na vlastní trati. Snímače byly umístěny (přilepeny) opět rovnoměrně na kružnici, nyní však po obvodu potrubí v místě stejného příčného průřezu, který se nacházel v polovině délky trubice. Délka trubky byla 1 m. Měření tlaku probíhalo uvnitř potrubí. Reprodukter se nacházel na jedné straně trubky a vytvářel akustické pulzace, které se šířily potrubím. Opačný konec byl otevřený. Schéma situace lze vidět na obr. 4.16. Skutečná situace při



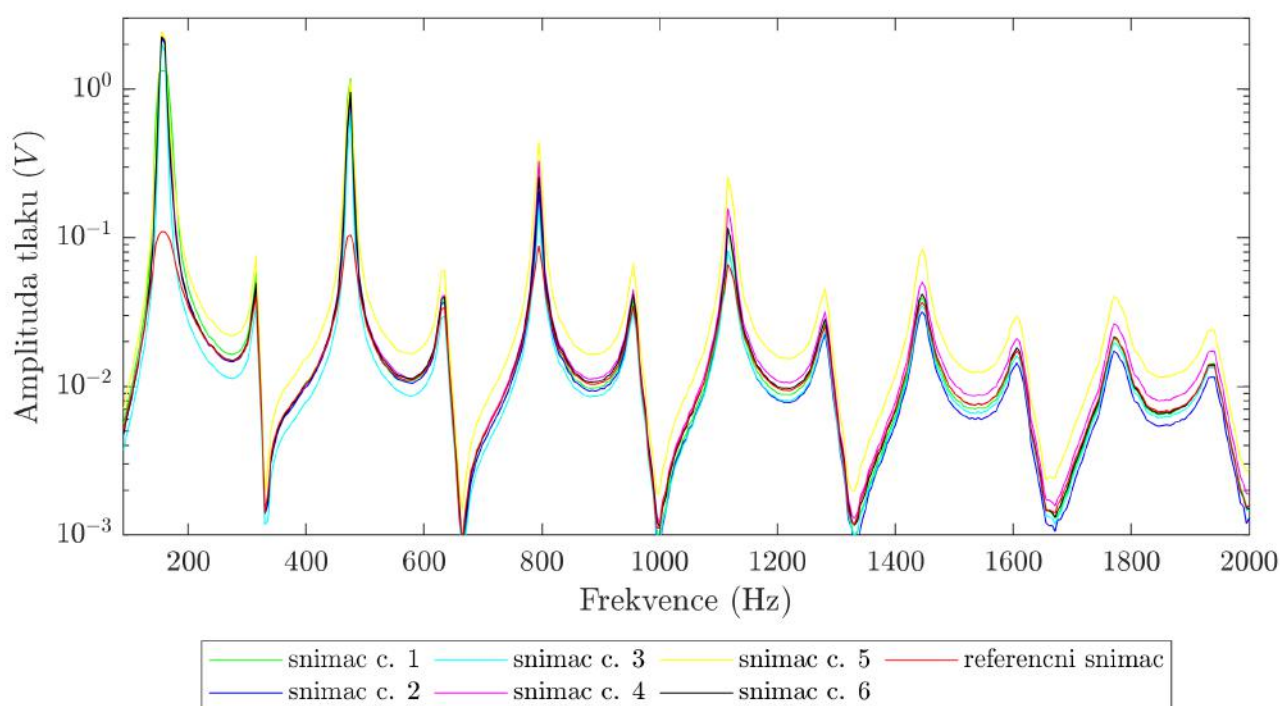
Obrázek 4.16: Schéma druhého rozmístění snímačů při jejich testování

měření je zachycena na obr. 4.17.

Vybuzení tlakových pulzací bylo provedeno stejným způsobem jako v prvním případě – za pomoci reproduktoru byly postupně projížděny jednotlivé frekvence. Amplitudové spektrum z testování na trubce je možné vidět na obrázku 4.18. Velikost tlaku ve frekvenčním spektru kalibrovaného (referenčního) snímače byla upravena tak, aby odpovídala ostatním snímačům, neboť měří tlak na jiném rozsahu napětí. Průběh tlaku zůstal stejný. Z obrázku je patrné, že amplitudová spektra nejsou totožná, avšak jsou si velmi podobná. Při bližším náhledu lze vidět, že ve spodní části frekvenčního spektra, konkrétně v oblastech vlastních frekvencí, je amplituda měřicích snímačů vyšší než u referenčního snímače.



Obrázek 4.17: Skutečná situace druhého rozmístění snímačů při jejich testování



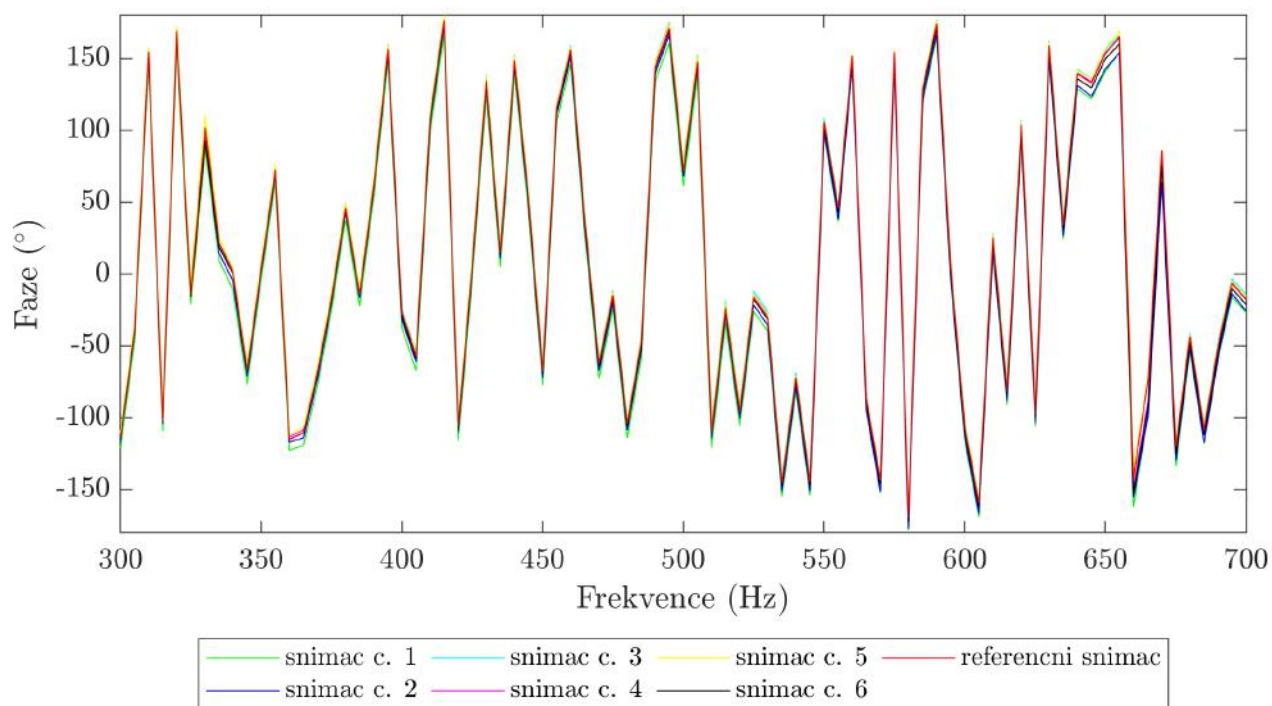
Obrázek 4.18: Porovnání amplitudového spektra při testování snímačů

Odchytky jsou však pro všechny snímače podobné, proto při porovnání snímačů vůči sobě jsou rozdíly dostatečně malé.

Další srovnání lze vidět z fázového spektra, které je na obr. 4.19. Byla zobrazena pouze část spektra z důvodu vyšší přehlednosti. Fáze od všech snímačů (včetně kalibračního) jsou pro jednotlivé frekvence určeny velmi podobně. Podobný průběh jako na obrázku byl pozorován v celém spektru.

Odchytky v amplitudách a fázích mohly být ovlivněny způsobem nalepení snímačů, jejich natočením, nesteromerným prostorovým vyzařováním akustické energie z reproduktoru či nějakým vnějším vlivem, protože soustava se nacházela v uzavřené místnosti. Ze všech snímačů byl vybrán a vyřazen z dalšího měření jeden snímač, u kterého byly odchytky od ostatních snímačů největší.

#### 4.2. TESTOVÁNÍ MIKROFONŮ



Obrázek 4.19: Porovnání úseku fázového spektra při testování snímačů

Celkově lze zhodnotit, že ačkoliv nejsou průběhy z testování stejné, snímače měří podobně a při porovnání průběhu pouze mezi sebou je lze použít pro vlastní měření na trati s laděnou odbočkou.



## 5. Zjištění objemové viskozity

Objemová viskozita na rozdíl od první dynamické viskozity není vlastností pouze materiálu, ale je závislá na frekvenci a její hodnota není často známá. V této kapitole je představen postup, který byl použit ke zjištění objemové viskozity vzduchu.

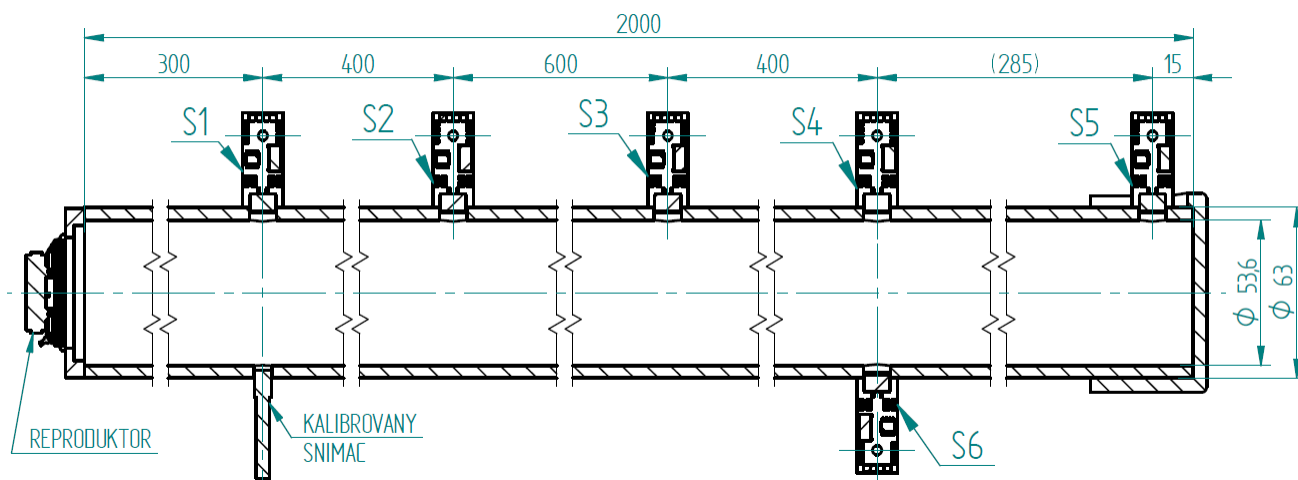
Nejdříve bylo provedeno měření na volné trubce bez laděné odbočky. S využitím modelu vlnové rovnice pro volnou trubku spolu s okrajovými podmínkami byla vytvořena přeúčtená soustava rovnic, tzn. je k dispozici více rovnic než neznámých. Soustava byla řešena s využitím metody nejmenších čtverců, protože přesné řešení v takovém případě neexistuje. Vzhledem k tomu, že se jedná o nelineární rovnice s komplexními exponenty, byly porovnány různé algoritmy řešení a z nich jeden vybrán. Dále jsou přestaveny animace, které znázorňují, jak dokonale se podařilo aproximovat funkci na naměřená data. Zjištěné velikosti objemové viskozity byly následně proloženy pomocí vhodné funkce. Výstupem této kapitoly je frekvenčně závislý vztah objemové viskozity.

### 5.1. Měření na volné trubce

Měření na volné trubce slouží ke dvěma účelům. První důvod měření je odhad závislosti objemové viskozity na základě průběhu tlaku ve volné trubce. Druhým využitím je porovnání výsledků vůči variantě s dynamickým rezonátorem. Díky porovnání je zřejmé, která část spektra byla zatlumená.

Na základě geometrie představené ve druhé kapitole na obr. 2.1 byla z PVC-U plastu nejdříve vyrobena přímá trubka bez laděné odbočky, která byla také proměřena. Díry byly vyvrtány až po proměření obou variant – s otevřeným i uzavřeným koncem. Pro všechna měření byla snaha, aby se se snímači pohybovalo co nejméně a podmínky měření byly co nejvíce podobné, ideálně stejné. Z toho důvodu byl při měření přímé trubky materiál laděné odbočky již přítomný, aby nebylo nutné snímače mezi jednotlivými měřeními sundávat a znovu lepit. Přítomnost dalšího materiálu by neměla ovlivnit výsledky měření, protože tuhost potrubí je řádově vyšší než tuhost vzduchu a lze stěnu potrubí považovat za pevnou.

Geometrii volné trubky lze vidět na následujícím obrázku 5.1. Umístění snímačů, bu-



Obrázek 5.1: Geometrie zavřené trubky bez laděné odbočky

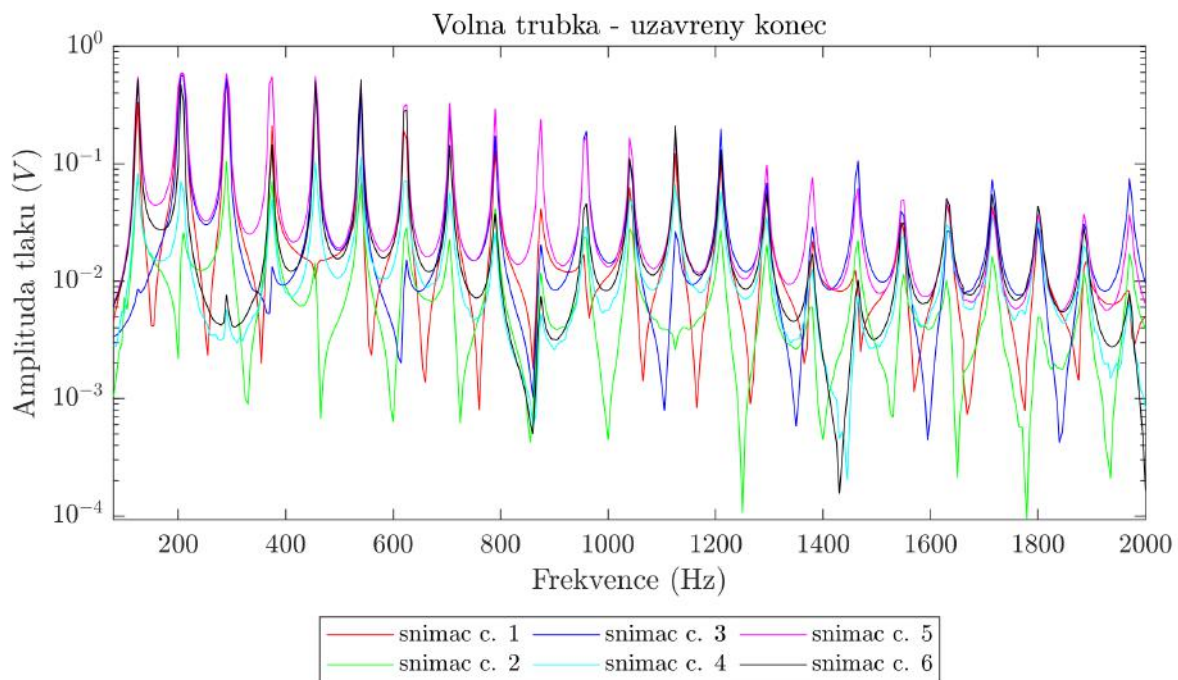
## 5.1. MĚŘENÍ NA VOLNÉ TRUBCE

diče i jednotlivé rozměry jsou patrné z obrázku a jsou stejné i pro měření s laděnou odbočkou. Naproti prvnímu snímači (S1) na stejném průřezu byl umístěn kalibrovaný snímač a naproti snímače na čtvrté pozici (S4) byl umístěn klasický snímač, aby bylo možné ověřit správnost měření.

K vybuzení tlakových pulzů byl použit reproduktor, měřené pásmo frekvencí bylo stejné se zvoleným, tj. od 100 Hz do 2 kHz. Data byla zpracována pomocí FFT s dodržáním podmínky koherence. Vhodný časový interval byl zvolen podle kalibrovaného snímače, avšak z dalšího vyhodnocování byl snímač vyřazen kvůli odlišné charakteristice a napěťové úrovni v porovnání s ostatními snímači.

Již při pozorování časového záznamu bylo zjištěno, že snímače na druhé a čtvrté pozici byly pravděpodobně špatně přilepeny, protože amplitudy tlaku u snímačů nesouhlasí s amplitudami tlaku v závislosti na ostatních snímačích. Průběh tlaku u obou snímačů odpovídá, avšak amplitudy jsou malé (je zaznamenáno kmitání ve správné fázi, ale s menší velikostí amplitudy). Z toho důvodu byl využit snímač S6 namísto S4 a snímač S2 nebyl vůbec zahrnut v dalším vyhodnocování.

Amplitudové spektrum pro uzavřený konec potrubí je zobrazeno na obr. 5.2. Vypo-



Obrázek 5.2: Amplitudové spektrum tlaku pro trubku s uzavřeným koncem

čítané vlastní frekvence jsou velice podobné teoretickým hodnotám, které lze získat pro uzavřený a otevřený konec z následujících vztahů:

$$\begin{aligned}
 f_{uk,(k)} &= \frac{a_0 \cdot (2k - 1)}{4L_{potr}}, & k &= 1, 2, 3, \dots \\
 f_{ok,(k)} &= \frac{a_0 \cdot (2k)}{4L_{potr}}, & k &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

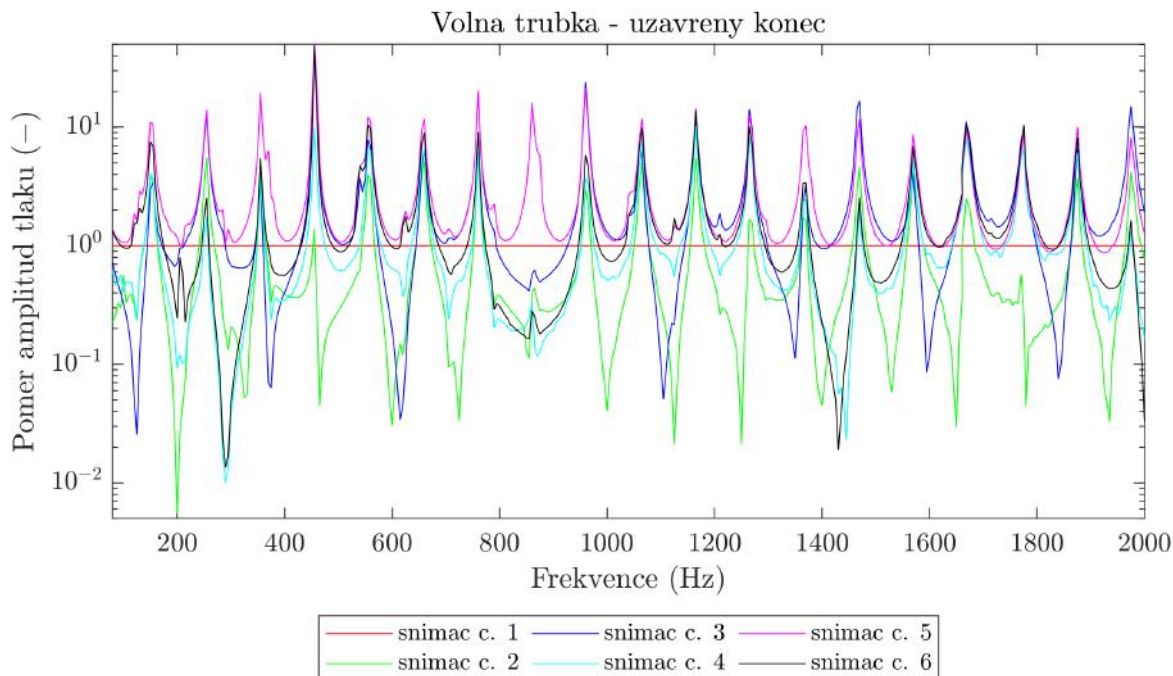
$f_{uk,(k)}$  (Hz)    k-tá vlastní frekvence pro uzavřený konec trubice,  
 $f_{ok,(k)}$  (Hz)    k-tá vlastní frekvence pro otevřený konec trubice,  
 $L_{potr}$  (m)    délka potrubí.

Pro uzavřený konec je teoretická velikost 1VF 42,9 Hz, ta však na grafu není viditelná, protože je mimo sledovaný interval frekvencí. Druhá vlastní frekvence již viditelná je a rozdíl mezi teoretickou ( $f_{t,uk,(2)} = 128,6$  Hz) a vypočtenou ( $f_{v,uk,(2)} = 125$  Hz) hodnotou je menší než 4 Hz. Navíc byla tato hodnota porovnána s výpočtem dle modální akustiky v Ansysu, kde vychází hodnota 129,8 Hz. Vzdálenost mezi vlastními frekvencemi je také podobná. Vypočtená hodnota z naměřených dat je závislá na frekvenční rozlišitelnosti (5 Hz) a pohybuje se mezi 80 Hz a 85 Hz. Teoretická hodnota je 85,8 Hz a hodnota z Ansysu 86,6 Hz. Porovnání druhé až páté frekvence je znázorněno v tabulce 5.1, přičemž za rychlost zvuku byla zvolena hodnota  $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Tabulka 5.1: Porovnání vlastních frekvencí pro uzavřený konec

vlastní frekvence	teor. výpočet (Hz)	modální akustika (Hz)	měření (Hz)
2.	128,6	129,8	125
3.	214,4	216,4	210
4.	300,1	303	290
5.	385,9	389,5	375
interval	85,8	86,6	80/85

Aby bylo možné porovnat výsledky z měření vůči výpočtům analytickým a numerickým, bude často využíván podíl vůči amplitudě na místě prvního snímače. Tímto krokem vznikne bezrozměrná svislá osa, která značí kolikrát je tlak silnější než na prvním snímači. Upravený graf lze vidět na obr. 5.3. Poměr prvního snímače vůči stejné hodnotě je roven



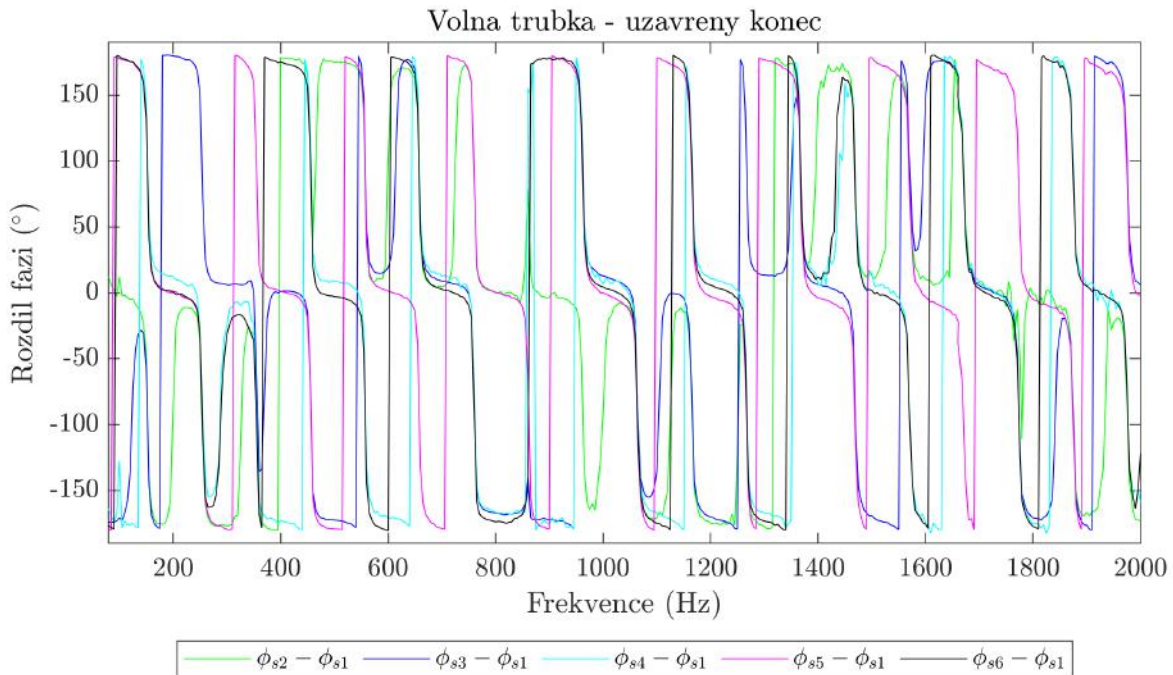
Obrázek 5.3: Poměr amplitud vůči tlaku prvního snímače

jedné pro všechny frekvence, znázorněno červenou vodorovnou úsečkou v grafu. Značnou nevýhodou takového zobrazení je skutečnost, že při velmi malých velikostech tlaku na

## 5.2. FORMULACE ŘÍDÍCÍ FUNKCE

prvním snímači vznikají velmi vysoké hodnoty poměru. Navíc chyba měření z prvního snímače se přenáší i na ostatní pozice.

Fázové spektrum je možné vidět na obr. 5.4. Vzhledem k tomu, že zjištěná fáze je



Obrázek 5.4: Fázové spektrum tlaku pro trubku s uzavřeným koncem

závislá na volbě aktuálního časového intervalu jdoucího do FFT, jak je viditelné z obr. 4.19, je zobrazen rozdíl fází mezi  $n$ -tým a prvním snímačem (mezi druhým a prvním, třetím a prvním, atd.). Takové zobrazení poskytuje lepší informace o dané situaci. Jsou viditelné přechody přes vlastní frekvence, případně místa největšího propadu tlaku, která jsou mezi vlastními frekvencemi. Toho lze pozorovat na místech, kde je rychlá změna fáze. Nejedná se však o případy, kdy se fáze dostala z intervalu  $\langle -180, 180 \rangle$  a nastala skoková změna o  $360^\circ$ .

Amplitudové a fázové spektrum pro otevřený konec trubice lze nalézt v příloze.

## 5.2. Formulace řídicí funkce

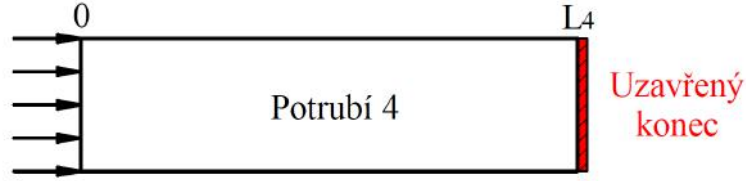
Druhou viskozitu je možno stanovit z porovnání naměřených a vypočtených tlakových pulzací [12]. V této sekci je odvozena rovnice, která je řídicí pro určování objemové viskozity. Nejdříve je představen matematický model problému, ze kterého vznikne několik rovnic. Tyto rovnice se spojí dohromady a vyladí na základě experimentálních dat. Hledanou podmínkou je právě objemová viskozita spolu s rychlostí zvuku.

Rovné přímé potrubí je možné popsat za pomoci jedné vlnové rovnice.

$$p_4(x_4, t) = e^{i\omega t} \left[ C_{41} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{a_k} x_4\right) + C_{42} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{a_k} x_4\right) \right], \quad x_4 \in \langle 0; L_4 \rangle$$

Ve vlnové rovnici jsou dvě neznámé proměnné konstanty  $C$  a komplexní rychlost zvuku, která je dopočtena přes rychlost zvuku a objemovou viskozitu. Díky nalezené rychlosti zvuku je možné do určité míry ověřit vypočítané výsledky (rychlost zvuku je známá).

Schéma modelu je možné vidět na obrázku 5.5. Potrubí je označeno pořadovým čís-



Obrázek 5.5: Model rovného potrubí

lem 4, aby nedošlo k záměně s jiným úsekem definovaným v 2. kapitole. Pro výpočet je použito měření na trubce s uzavřeným koncem. Díky uzavřenému konci je možné přesně definovat okrajovou podmínku (OP) na konci potrubí – podmínka nulového průtoku:  $\mathbf{Q}_4(\mathbf{L}_4) = \mathbf{0}$ . Mezi další podmínky patří známé velikosti tlaků v místech snímačů (celkem 4):  $\mathbf{p}_4(\mathbf{x}_{S_n}) = \mathbf{K}_{S_n}$ , kde  $K_{S_n}$  je známá komplexní konstanta a  $n=1, 3, 5$  a  $6$ . Index  $n$  je spojený s označením snímače na obr. 5.1, nikoliv pozice. Při rozepsání podmínek dle rovnic (1.59) a (1.51) s využitím několika jednoduchých úprav vznikají následující vztahy:

$$\begin{aligned} C_{41} &= C_{42} \cdot \exp\left(-2i\frac{\omega L_4}{a_k}\right) \\ p_4(x_{S_n}) &= C_{41} \cdot \exp\left(i\frac{\omega x_{S_n}}{a_k}\right) + C_{42} \cdot \exp\left(-i\frac{\omega x_{S_n}}{a_k}\right), \quad n = 1, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nyní bude proveden poměr tlakových podmínek vůči tlakové podmínce prvního snímače, přičemž integrační konstanta  $C_{41}$  bude nahrazena z průtokové podmínky. Díky náhradě vymizí konstanta  $C_{41}$ .

$$\frac{p_4(x_{S_n})}{p_4(x_{S_1})} = \frac{C_{42} \cdot \exp\left(i\omega\frac{(x_{S_n}-2L)}{a_k}\right) + C_{42} \cdot \exp\left(-i\omega\frac{x_{S_n}}{a_k}\right)}{C_{42} \cdot \exp\left(i\omega\frac{(x_{S_1}-2L)}{a_k}\right) + C_{42} \cdot \exp\left(-i\omega\frac{x_{S_1}}{a_k}\right)}, \quad n = 3, 5, 6 \quad (5.3)$$

Na pravé straně rovnice je možné zkrátit konstantu  $C_{42}$ . V rovnicích zůstane jediná neznámá – komplexní rychlost zvuku. Rovnice bude na závěr pronásobena jmenovatelem pravé strany a všechny členy se převedou na jednu stranu.

$$\begin{aligned} \frac{p_4(x_{S_n})}{p_4(x_{S_1})} \cdot \left[ \exp\left(\frac{i\omega(x_{S_1}-2L)}{a_k}\right) + \exp\left(-\frac{i\omega x_{S_1}}{a_k}\right) \right] \\ - \exp\left(\frac{i\omega(x_{S_n}-2L)}{a_k}\right) - \exp\left(-\frac{i\omega x_{S_n}}{a_k}\right) = 0, \quad n = 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Výsledné rovnice popisují stejný systém a v sobě již obsahují dvě okrajové podmínky, které budou vždy zaručeny. Podmínka nulového průtoku na konci potrubí a předepsaný tlak na prvním snímači. Hned na první pohled je patrné, že rovnice není závislá na průřezu potrubí a uvažuje konstantní rozložení tlaku po průřezu.

K výpočtu komplexní rychlosti zvuku je možné použít jen jednu rovnici. V takovém případě by průběh tlaku velice přesně odpovídal všem třem zadaným podmínkám. To by pravděpodobně vedlo k velkému rozdílu tlaku na místech ostatních snímačů, které nebyly zahrnuty. Při zahrnutí dvou nebo tří rovnic nebude možné soustavu vyřešit přesně. Například pokud bude přesně odpovídat jedna rovnice, druhá (příp. třetí) nebude souhlasit.



### 5.3. ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE V MATLABU

Při použití všech tří rovnic současně budou zaručeny pouze dvě OP obsažené v rovnicích, zbylé tlaky budou po vyřešení co nejlépe aproximovány s co nejmenší chybou.

Levá strana rovnic v (5.4) se označí jako dílčí chyby  $Er_n$ , pro  $n = 3, 5, 6$ . K řešení přeurčené soustavy rovnic se využije metoda nejmenších čtverců:

$$Error = |Er_3|^2 + |Er_5|^2 + |Er_6|^2, \quad (5.5)$$

$Error$  (-) celková nepřesnost (chyba).

Jelikož komplexní rychlost zvuku má reálnou i imaginární složku bude nutné řešit exponenciály s komplexními argumenty. Výsledkem je obecně komplexní číslo a při pouhém umocnění na druhou mohou vzniknout záporná čísla. Z toho důvodu jsou nejdříve vytvořeny absolutní hodnoty a až poté umocněny. Tím vznikne vždy kladná nenulová hodnota, která představuje nepřesnost při řešení rovnic (5.4). Při minimalizaci celkové nepřesnosti je nalezeno řešení, které je nejlepším kompromisem pro všechny tři podmínky tlaků, zbylé dvě podmínky budou splněny vždy. Rovnice platí pro jednu úhlovou rychlost, je potřeba rovnici vyřešit mnohokrát pro její různé hodnoty. Řešení rovnice (5.5) je možné uskutečnit pomocí numerických výpočtů v programu Matlab.

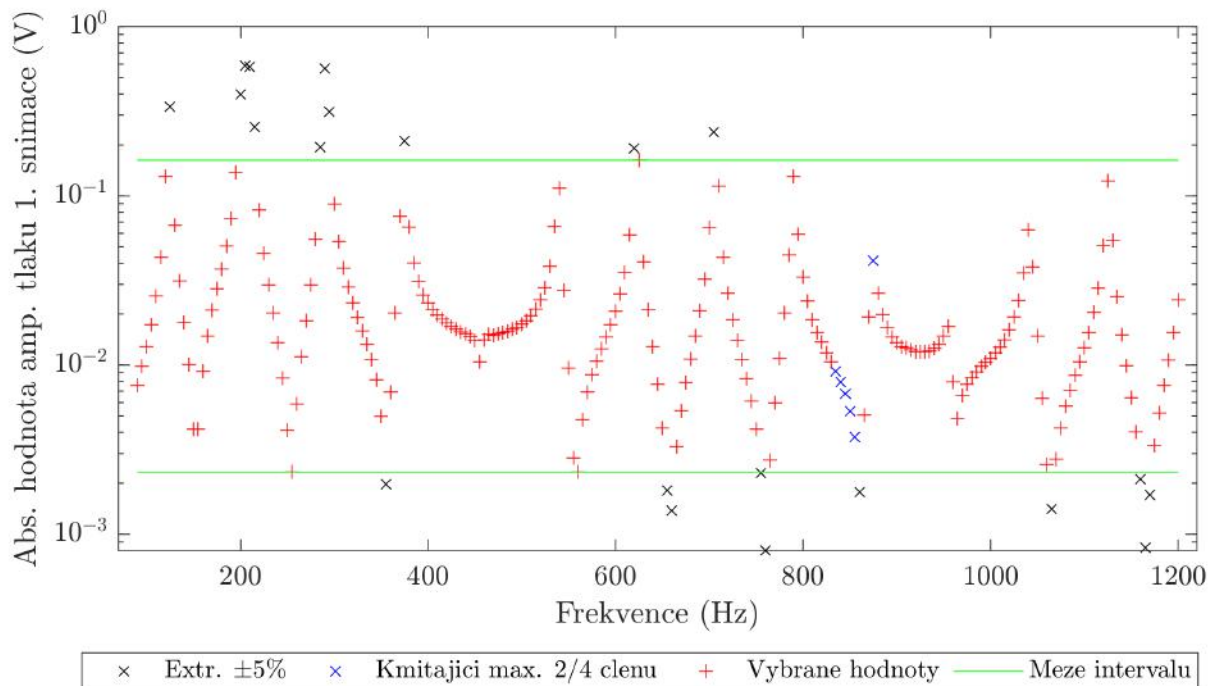
### 5.3. Řešení nelineární komplexní funkce v Matlabu

Při pohledu na řídicí rovnici (5.4) lze vidět, že velkou roli při výpočtu hrají poměry tlaku. Aby nedošlo k velkým chybám, jsou nejdříve data filtrována. S ohledem na počet použitých snímačů a velikost vlnové délky bylo nejdříve zvoleno použitelné frekvenční pásmo do 430 Hz. Při řešení bylo postupně zjištěno, že dobré proložení je možné vytvořit až do hodnot cca 1300 Hz, při vyšších hodnotách frekvence byl nízký počet snímačů po délce trubice velice znatelný a nalezená viskózní složka byla nereálně vysoká (algoritmus zkonvergoval ke špatnému výsledku). S ohledem na průběžné výsledky bylo nakonec zvoleno pásmo od 100 Hz do 1200 Hz, aby bylo zaručeno, že nalezená funkce do značné míry odpovídá tlakům ze snímačů.

Filtrace dat proběhla s ohledem na tlak z prvního snímače, protože se jím ostatní tlaky dělily. Ze zvoleného frekvenčního pásma bylo nejdříve odebráno extrémních horních i dolních pět procent hodnot, jak je znázorněno na obr. 5.6. Dále byly vytvořeny tlakové poměry a jejich časové průběhy. Z průběhů bylo možné zjistit, zda se snímač nacházel v tlakovém uzlu (amplituda kmitání ostatních mikrofonů byla malá v porovnání s amplitudou prvního snímače). Pokud se nacházel více než jeden snímač v tlakovém uzlu, byly dané frekvence vyřazeny z dalšího vyhodnocování. V takových případech byly velikosti tlaku při aproximaci značně ovlivněny pouze dvěma, někdy i jen jedním měřeným bodem a řešení mohlo zkonvergovat k extrémně vysokým hodnotám tlaku.

Vyřazené extrémní hodnoty jsou v grafu označeny černým křížkem ( $\times$ ). Meze, které značí poslední vybraný krajní bod, jsou označeny zelenými úsečkami ( $-$ ). Všechny body, které byly vyhodnoceny jako nekmitavé (tlak kmitá pouze u jednoho nebo dvou snímačů), se nachází v okolí 850 Hz a jsou značeny modrým křížkem ( $\times$ ). Použité hodnoty jsou označeny červeným plus ( $+$ ).

Ještě před samotným výpočtem bylo k nalezení minima funkce porovnáno šest různých řešičů (algoritmů) v Matlabu. Protože řešená rovnice je nelineární s komplexními argumenty, první zvolený způsob řešení by nemusel být zcela vhodný a mohlo by dojít k chybnému vyhodnocení.



Obrázek 5.6: Vybrané hodnoty tlaků změřených na prvním snímači S1

Mezi porovnávanými řešiči byl vybrán jeden doporučovaný k řešení nelineárních rovnic – *fsolve*. Druhý, *fmincon*, je vhodný k nalezení minima nelineární funkce s více proměnnými. Stejně jako předchozí algoritmus i tento vychází z počátečního bodu, který je nutné zadat, avšak hledání lze již specifikovat na omezené oblasti. Třetí řešič, *global search*, využívá k řešení algoritmu *fmincon*. Po vypočtení prvního řešení vytvoří další počáteční body rovnoměrně rozložené po vymezeném prostoru a nalezne předběžné řešení z nových počátečních bodů. Body, které splňují určitá kritéria, dále řeší za pomoci *fmincon* a na závěr vybere nejlepší řešení ze všech zkoumaných variant. Čtvrtý algoritmus, *surrogateopt*, je vhodný pro časově náročné úlohy. Na rozdíl od všech předchozích algoritmů k výpočtu nepoužívá počáteční bod. Podobně jako u *global search* řešiče je nutné zadat omezující podmínky (hranice hledání), protože se minimum hledá na základě náhradní funkce vytvořené z náhodně rozmístěné množiny bodů po zvolené oblasti. [19]

Poslední dva řešiče využívají evolučních algoritmů, které jsou inspirovány přírodou. *Particle swarm*, předposlední řešič, používá teorie chování hejna, v tomto případě hejna částic. Částice jsou definované polohou a vektorem rychlosti. Rychlost se upravuje v závislosti na všech vyhodnocených částicích (některé částice mají lepší hodnoty než jiné) a podle určitých faktorů se částice pohybují. Po několika krocích by měl pohyb hejna teoreticky směřovat ke globálnímu minimu. *Genetic algorithm*, poslední porovnávaný řešič, vytvoří náhodnou prvotní populaci (vybere množinu vyhodnocovaných bodů). Na základě jejich hodnot a procesů z evoluce – dědičnost, mutace, přirozený výběr a křížení vybere nový výběr bodů, které opět vyhodnotí. Takto postup opakuje, dokud není splněno některé kritérium ukončení konvergence. Pro oba algoritmy je nutné omezit hledanou oblast, na které se vytvoří prvotní populace (dle nějakého rozdělení se pseudonáhodně rozmístí prvotní body po omezené oblasti). [19]

*Particle swarm*, na rozdíl od genetického algoritmu nevyhodnocuje tak velké množství bodů, díky čemuž nalezne řešení o dost rychleji. Řešení však nemusí být globální a pro

### 5.3. ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE V MATLABU

funkci s mnoha lokálními extrémy je vhodnější použít genetický algoritmus, který často najde skutečný globální extrém na zvolené množině. [19]

Celková chyba minimalizace funkce (5.5) je závislá na komplexní rychlosti zvuku, která je definovaná vztahem (1.45). Pro připomenutí a přímé porovnání je vztah uveden ještě jednou.

$$a_k = \sqrt{\frac{K + i\omega(\mu_b + \frac{4}{3}\mu)}{\rho}}$$

Z počátku byla snaha hledat komplexní rychlost zvuku jako komplexní číslo. Většina řešičů však selhávala při práci s imaginární částí a výpočet často kolaboval, proto se přešlo k hledání dvou reálných parametrů a imaginární složka byla vytvořena až v použité rovnici.

Ve vztahu komplexní rychlosti zvuku byly nahrazeny dva členy za neznámé parametry, které jsou hledány. Nahrazené členy odpovídají rychlosti zvuku a objemové viskozitě:

$$a_k = \sqrt{\mathbf{a}_{c1}^2 + i\frac{\omega}{\rho}\mathbf{a}_{c2} + i\frac{4\omega\mu}{3\rho}}, \quad a_{c1} \equiv a_0, \quad a_{c2} \equiv \mu_b, \quad (5.6)$$

$a_{c1}$  ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )      hledaný parametr představující rychlost zvuku,  
 $a_{c2}$  ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )      hledaný parametr představující objemovou viskozitu.

Oba zvolené parametry jsou reálné. První z nich  $a_{c1}$  byl hledán v intervalu od  $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  do  $360 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Rychlost zvuku ve vzduchu je závislá pouze na teplotě a na složení média [22]. Rychlost šíření tlakových pulzací v plastovém PVC potrubí se výrazně neliší od teoretické rychlosti suchého zvuku, maximální naměřené rozdíly v [16, 9, 4] jsou v řádech jednotek  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , proto bylo hledané pásmo zvoleno relativně úzké.

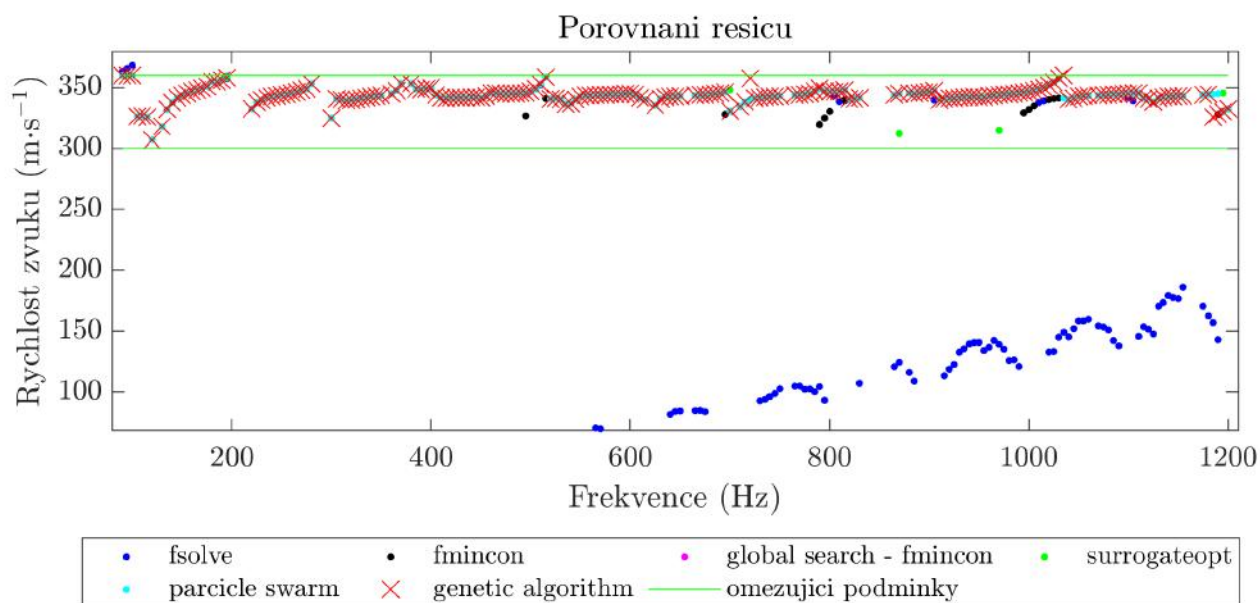
Druhý parametr  $a_{c2}$ , byl nejdříve omezen v rozsahu od 0 do  $1000 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Po několika výpočtech se ukázalo, že interval hledání je příliš velký a algoritmy buď nezkonvergují anebo výpočty trvají příliš dlouho. Z toho důvodu byly hranice postupně optimalizovány až do finální podoby – spodní hranice byla stejná pro celé spektrum  $1 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , horní hranice se s rostoucí frekvencí snižovala od 200 do  $0,9 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Navíc byla do výpočtů vložena ještě implicitní podmínka nezáporné hodnoty objemové viskozity.

Porovnání spočítané rychlosti zvuku pro šest různých řešičů lze vidět na obr. 5.7. Algoritmus `fsolve` (•) jako jediný z představených nemá zahrnuté žádné omezené hranice hledání. Vychází z počátečního bodu, který byl zvolen na hodnotách  $a_{c1} = 333 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $a_{c2} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Nalezené hodnoty rychlosti zvuku v horní frekvenční oblasti vůbec neodpovídají reálným hodnotám. U ostatních algoritmů je viditelné, že se hodnoty převážně překrývají a našly stejný výsledek. Pro několik frekvencí se výpočet zastavil na okraji řešené oblasti, takové body není možné započíst do dalších výpočtů a je nutné je vyřadit.

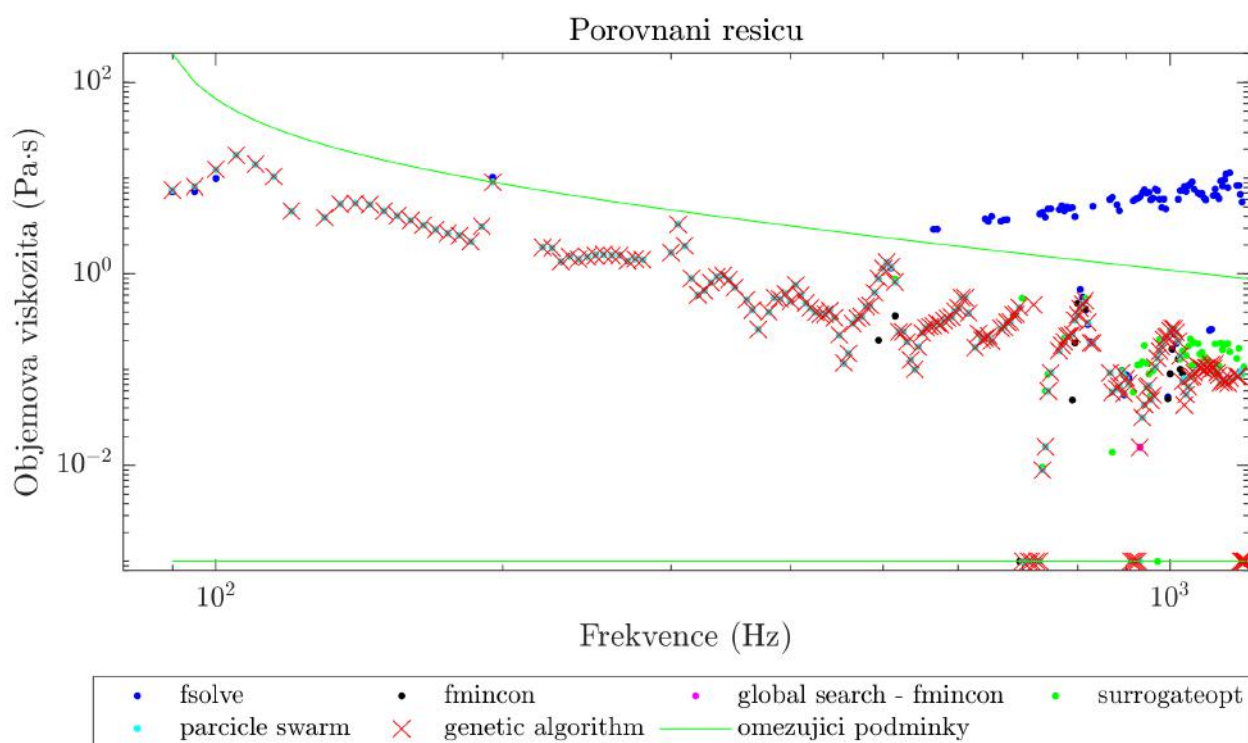
Nalezená hodnota objemové viskozity je zobrazena v dalším grafu 5.8. Pro nízké frekvence jsou nalezené hodnoty téměř totožné pro všechny řešiče. U vyšších frekvencí je možné pozorovat, že různé algoritmy našly různá minima. `Fsolve` algoritmus dokonce našel hodnoty mimo omezenou oblast.

Poslední porovnání ukazuje graf 5.9 znázorňující nepřesnost při výpočtu (rovnice měla vyjít rovna nule, ale po nalezení minima zůstala nějaká chyba). Ačkoliv algoritmus `fsolve` (•) vykazuje nejmenší nepřesnosti, není možné ho použít vzhledem k nalezeným hodnotám rychlostí zvuku a objemové viskozity v druhé půlce frekvenčního pásma. Dále si lze všimnout, že u vyšších frekvencí při použití algoritmu `fmincon` (•) a `surrogateopt` (•) jsou vyšší hodnoty nepřesností. Ostatní algoritmy v tomto případě našly velice podobné hodnoty.





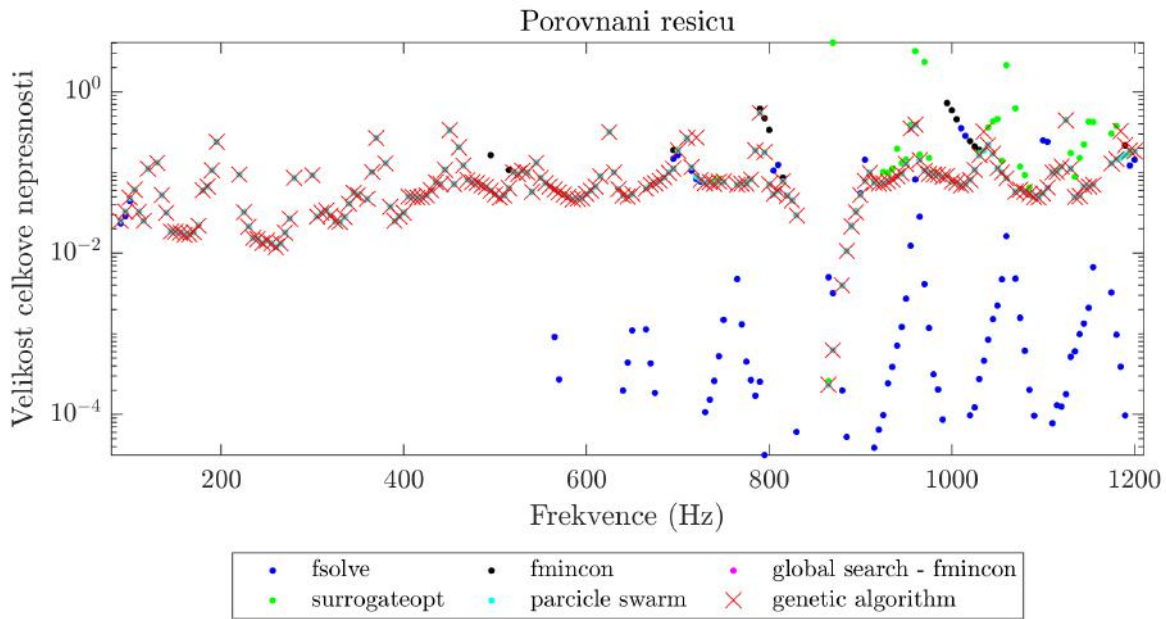
Obrázek 5.7: Porovnání různých algoritmů výpočtu v Matlabu – rychlost zvuku



Obrázek 5.8: Porovnání různých algoritmů výpočtu v Matlabu – objemová viskozita

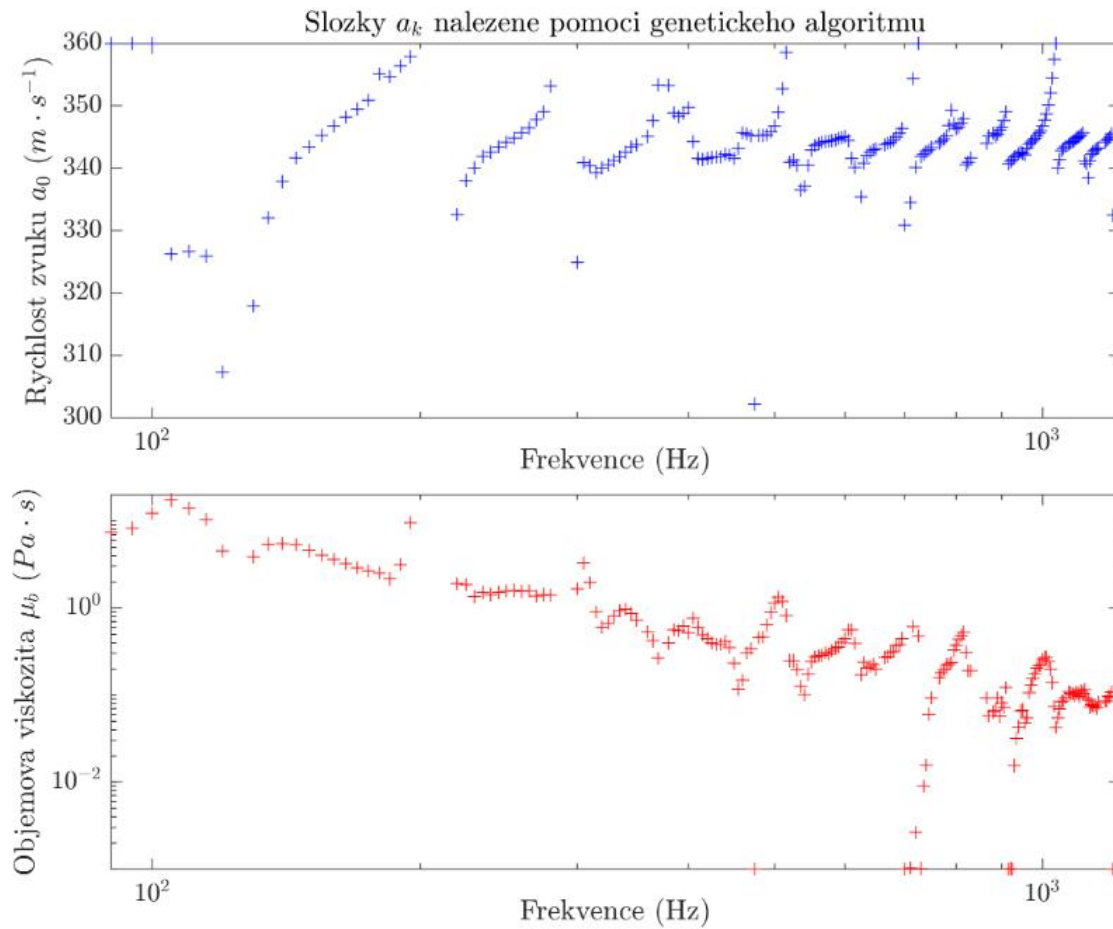
S ohledem na průběžné výsledky byl vybrán genetický algoritmus (+). I přes delší dobu výpočtu dokáže najít přesné hodnoty a při rozsáhlejší oblasti hledání neměl výrazné problémy s nalezením minima. Na daný problém by bylo možné použít také particle swarm či global search algoritmus, avšak obecně by bylo vhodné algoritmy otestovat na různých funkcích a srovnat nalezené výsledky se skutečnými extrémy. Mohlo by se jednat o zajímavý námět na další studii.

### 5.3. ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ KOMPLEXNÍ FUNKCE V MATLABU



Obrázek 5.9: Porovnání nepřesnosti výpočtu pro různé algoritmy

Hodnoty rychlosti zvuku a objemové viskozity nalezené pouze za pomoci genetického algoritmu (GA), které prošly výše popsanou selekcí dat, jsou zobrazené v 5.10.



Obrázek 5.10: Nalezené hodnoty rychlosti zvuku a objemové viskozity za pomoci genetického algoritmu

Frekvence, u kterých platilo, že se hodnoty rychlosti zvuku lišily o více než 3 % od teoretické hodnoty  $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (tj. neležely v intervalu od 332 do 353), byly vyřazeny z dalšího hodnocení. Stejně tak body, které se při výpočtu dostaly k okraji hledané oblasti objemové viskozity (hodnota menší než  $1 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  a jeden bod u horní meze).

Pro vyhlazení výsledné závislosti byla snaha jednotlivé frekvence překrývat, tj. rovnici (5.5) nepočítat jen pro jednu úhlovou rychlost, ale přičíst celkové nepřesnosti i z okolních bodů. Průběh se skutečně vyhladil, stávalo se však, že pokud byl některý bod špatný, tak s sebou stáhl i své okolí (což byl přesně opačný efekt, než kterého se chtělo dosáhnout). I když k tomuto úkazu docházelo ojediněle, nebyl postup nakonec aplikován. Nevhodné body (na okraji vyhledávané oblasti, špatně zkonvergované, apod.) byly vyjmuty až po nalezení všech minim a nedošlo k ovlivnění jiných frekvencí v rámci výpočtu.

Po zjištění obou hledaných parametrů  $a_{c1}$  a  $a_{c2}$  lze vypočítat komplexní rychlost zvuku. Při kombinaci 2 OP (5.2), např. průtokovou OP a vztah pro velikost tlaku v místě prvního snímače ( $n = 1$ ), lze zjistit konstanty  $C_{41}$  a  $C_{42}$ . Při znalosti integračních konstant je možné nalézt průběh tlaku po délce trubice. V následujících dvou animacích 5.11 a 5.12 je zobrazen poměr reálných složek tlaků pro jednu frekvenci (140 a 1200 Hz) v závislosti na poloze a času.

Animace 5.11: Aproximace průběhu poměru tlaků po délce trubice přes jednu periodu pro frekvenci 140 Hz

Reálná složka tlaku po délce trubice byla uvedena do poměru s reálnou složkou tlaku prvního snímače. Proto se v místě prvního snímače (cca 0.3 m) poměr pohybuje v mezích od -1 do 1. V grafu jsou také zachyceny poměry reálných složek tlaků v místech snímačů, které byly získány z experimentu. Jedna perioda byla rozdělena na 24 časových kroků pomocí jednotkové imaginární exponenciály, fázový posun v jednotlivých krocích je  $15^\circ$ .

Jak je vidět na animacích, poměr vypočítaných tlaků na prvním snímači sedí dokonale. Také na konci potrubí (ve 2 m) je patrná nulová derivace. To je způsobeno implicitně zadanými OP. Ostatní poměry tlaků jsou již aproximovány, aby celková nepřesnost byla co nejmenší. U druhé animace jsou rozdíly v některých časových krocích větší, ale stále je

Animace 5.12: Aproximace průběhu poměru tlaků po délce trubice přes jednu periodu pro frekvenci 1200 Hz

tlak relativně přesně aproximován. Průběhy by bylo možné vytvořit pro všechny zkoumané frekvence, jsou zde pro ukázkou vybrány dvě, jedna ze začátku intervalu a druhá z konce intervalu.

## 5.4. Aproximace dat

Proložení dat probíhalo již z očištěných dat. Z aproximace byly vyjmuty body, u kterých se nalezená rychlost zvuku příliš lišila od teoretické hodnoty, a body, které našly hodnotu objemové viskozity na okraji vyhledávané oblasti.

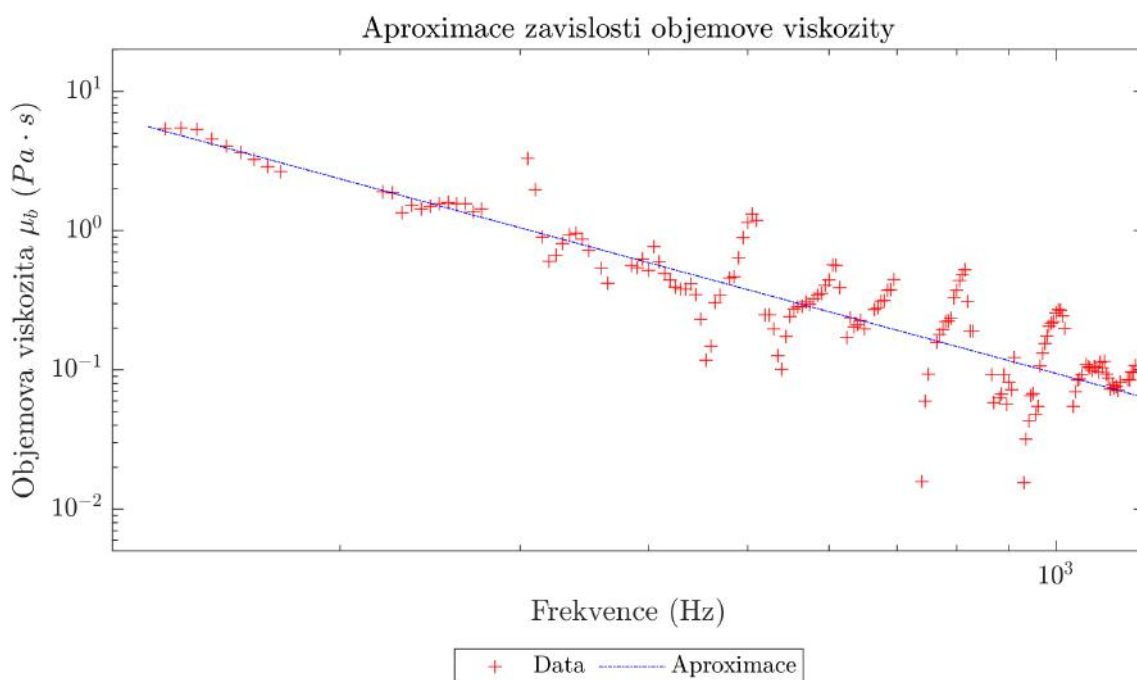
Aproximace proběhla v aplikaci *Curve Fitting Toolbox* spadající pod *MathWorks*. S ohledem na trend vyskytující se v datech pro objemovou viskozitu, byla k proložení vybrána funkce závislá na záporné druhé mocnině frekvence. K proložení byla zvolena robustní metoda, odolná vůči odlehlým pozorováním. Konkrétně *Bisquare weights*, která minimalizuje součet čtverců a v závislosti na vzdálenosti bodů od aproximované funkce přiřazuje vzdálenějším pozorováním menší váhu. Odlehlým realizacím je přiřazena nulová váha.

Graf proložení s logaritmickými osami je zobrazen na obr. 5.13. Nalezená funkce má následující tvar:

$$\mu_b = \frac{h}{f^2} = \frac{9,431 \times 10^4}{f^2} \quad (5.7)$$

$h$ (Pa)	součinitel objemové viskozity,
$f$ (Hz)	frekvence.

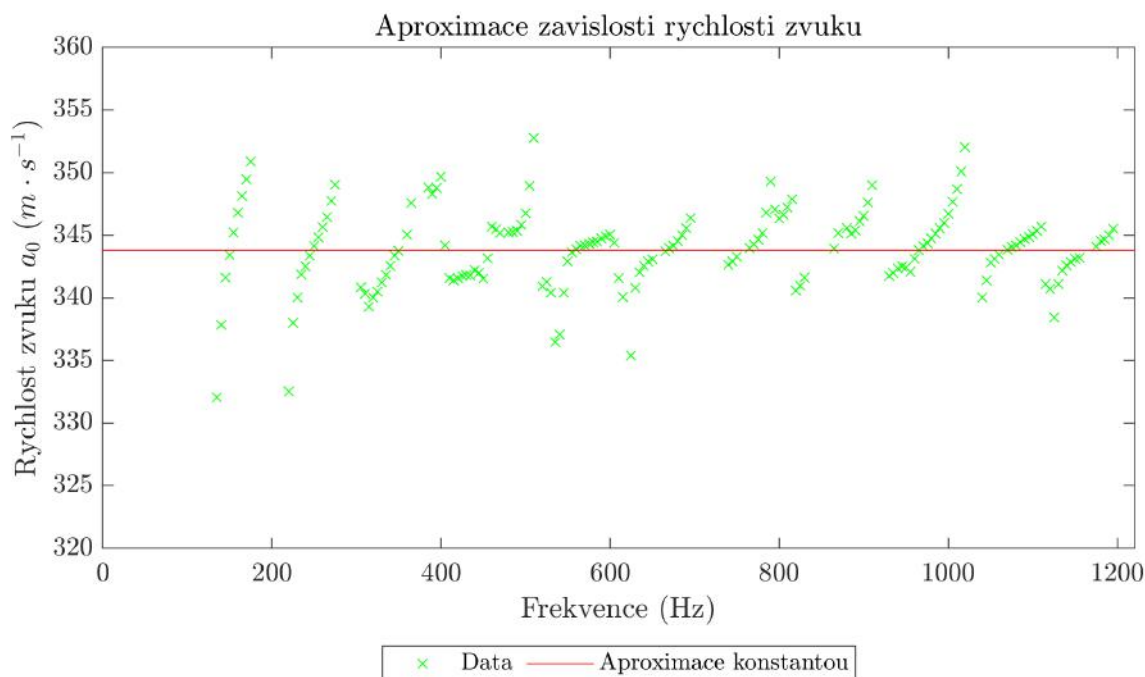
Nalezená závislost je překvapující, protože původní odhady předpokládaly hyperbolickou závislost na frekvenci. Ačkoliv byla závislost nalezena pro frekvence z intervalu  $\langle 135; 1200 \rangle$  Hz,



Obrázek 5.13: Závislost objemové viskozity na frekvenci včetně aproximované funkce

je zaveden předpoklad platnosti přes celý zkoumaný interval frekvencí  $\langle 100; 2000 \rangle$  Hz. Představená závislost (5.7) je použita jak v analytickém, tak i numerickém přístupu.

Rovněž proběhla aproximace rychlosti zvuku. V tomto případě byla hledána konstanta. Nalezená hodnota je do velké míry ovlivněna omezujícími podmínkami při hledání minima celkových nepřesností a výběrem vhodných bodů. Závislost lze vidět na obrázku 5.14. Nalezená hodnota rychlosti zvuku je  $a_0 = 343,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , což je velice podobné teoretické hodnotě.



Obrázek 5.14: Závislost rychlosti zvuku na frekvenci včetně aproximované funkce

#### 5.4. *APROXIMACE DAT*

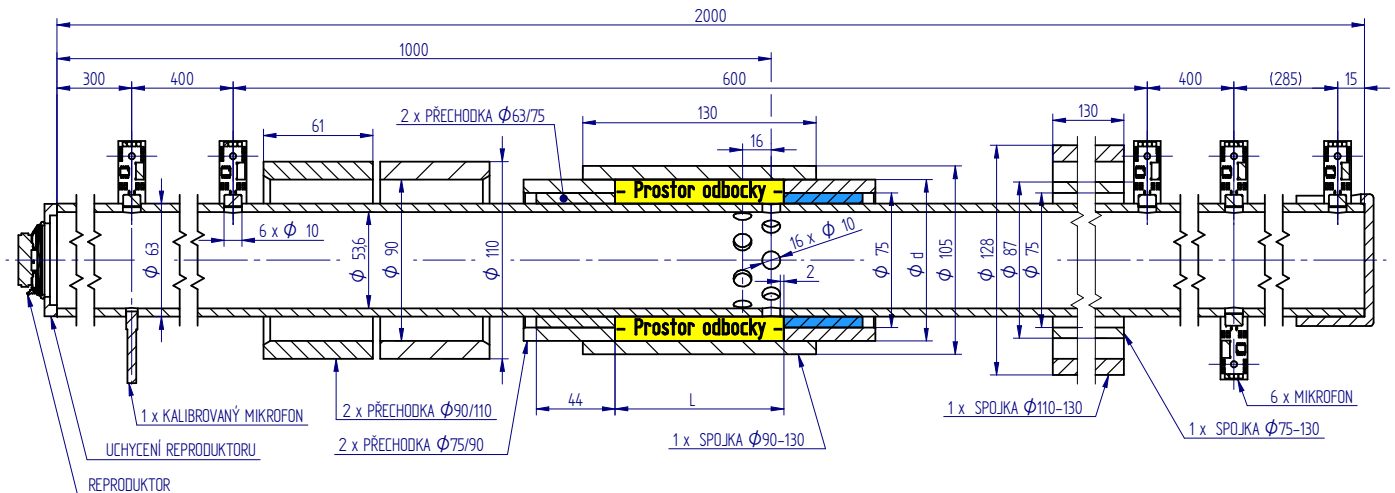
V grafu si lze všimnout, že nalezené velikosti rychlostí zvuku velmi ovlivňují vlastní frekvence (VF). Před dosažením VF velikost rychlosti postupně stoupá, v místě VF je nejvyšší a pak se skokově propadne a opět roste až k další VF. Na závislosti objemové viskozity je možné vidět podobný jev, který je pravděpodobně zapříčiněn řádově rozdílnými hodnotami tlaku pro různé frekvence, které vstupují do výpočtu. Odstranění takového jevu by šlo dosáhnout vhodnější volbou měřené geometrie, která má 1VF až za měřenou oblastí.



## 6. Experimentální ověření

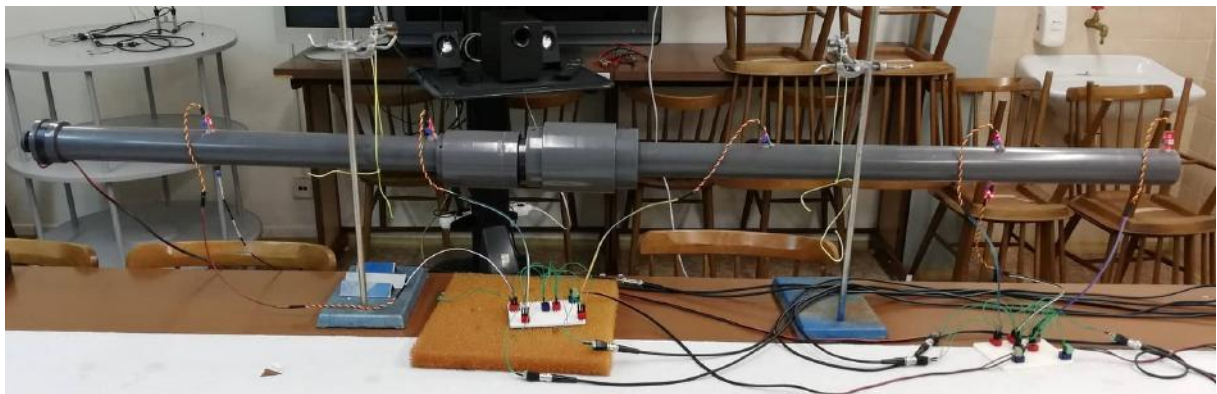
V této kapitole je nejdříve představena geometrie měřicí tratě, dále podmínky měření a na závěr výsledky zpracované pomocí FFT s využitím podmínky koherence. Vyhodnocení je provedeno pro případ uzavřeného i otevřeného konce potrubí.

Měřicí trať vychází ze schématu 2.1. Na následujícím obrázku 6.1 lze vidět náčrt podélného řezu navržené tratě. Umístění snímačů a reproduktoru je stejné, jako při měření



Obrázek 6.1: Návrh měřicí tratě s laděnou odbočkou – podélný řez

přímé trubky bez odbočky. Na hlavní potrubí byly nejdříve navlečeny přechodky a spojky, ze kterých lze poskládat různé varianty laděné odbočky (různé rozměry  $L$  a  $d$ ). Jednotlivé díly na sebe přesně líčují a vzniklé vůle (příp. přesahy) mezi díly jsou nepatrné. Snímače byly přilepeny na svá místa až po umístění přechodek a spojek, protože je nelze přes snímače převléci a bylo by nutné mikrofony odlepit a znovu nalepit. Přechodky a spojky byly na trati již přítomny při měření na přímé trubce bez laděné odbočky, díry však byly vyvrtány až po odměření varianty bez odbočky. Přechodka  $\phi 63/75$  označená modrou barvou byla k hlavnímu potrubí přichycena a její poloha zůstala stejná po celý průběh experimentu, na rozdíl od ostatních dílů. Všechny díly bylo možné zafixovat za pomoci šroubků, aby bylo zamezeno nechtěnému pohybu částí při měření. Jeden šroub je možné vidět na fotografii 6.3. Fotografie realizace z místa měření je na obr. 6.2, jedná se o variantu s otevřeným koncem. Hlavní potrubí je zavěšeno na provázcích. Uprostřed lze vidět



Obrázek 6.2: Realizace tratě s laděnou odbočkou a otevřeným koncem

laděnou odbočkou, na levé straně od ní jsou zaparkované aktuálně nevyužité spojky, které tvoří vnější obálku laděné odbočky. V prostřední části hlavního potrubí bylo vyvrtáno 16 děr dle společného návrhu. Fotografie provedení je na obr. 6.3. Detail na tři přechodky, které tvoří levou a pravou hranici prostoru laděné odbočky, a spojku tvořící vnější obálku laděné odbočky je na obr. 6.4. Fotografie byla zachycena ještě před vyvrtáním děr.



Obrázek 6.3: Díry na trubce



Obrázek 6.4: Přechodky a spojka

Větší průměr mezikruží, který definuje laděnou odbočku, je ve třech různých rozměrech:  $\phi d = 75, 90$  a  $110$  mm. Rozměr lze nastavit vhodným použitím přechodek. Délka laděné odbočky byla měřena také ve třech rozměrech:  $L = 74, 94$  a  $114$  mm. Přesná délka byla dosažena díky posunutí přechodek na levé straně. Do mezery se vložil plech o přesné délce, díky čemuž se vymezil daný prostor. Plech byl po nastavení a upevnění částí vyjmut. Způsob přestavení dílů k dosažení některých variant je znázorněn v animaci 6.5. Spojky je možné přesouvat přes všechny menší přechodky. Díky tomu je možné na

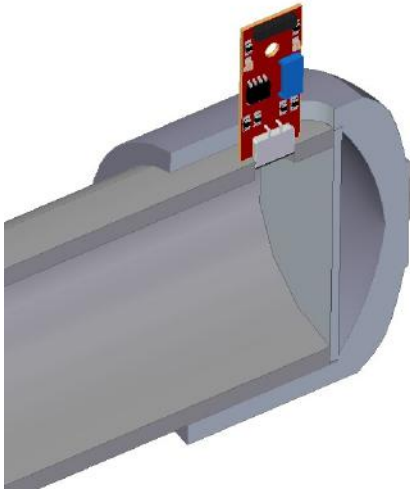
#### Animace 6.5: Způsob nastavení jednotlivých variant laděné odbočky

jedné straně od laděné odbočky nechávat přechodky a na druhé spojky. K nastavení většího průměru se k již použitým přechodkám přidají další, spojka z prostoru odbočky se



přesune na opačnou stranu než byly přechodky a naopak aktuální spojka se posune do prostoru odbočky.

Měření probíhalo ve dvou variantách, s uzavřeným a otevřeným koncem. Aby byla varianta s uzavřeným koncem geometricky podobná s návrhem, byla do komerčně dostupného víčka vložena kruhová destička, díky které je konec kolmý na osu potrubí. Kvůli snímači umístěnému těsně před koncem potrubí musela být navíc do víčka obrobena drážka. Na obrázku 6.6 je zobrazen CAD model konce tratě v podélném řezu (část geometrie není zobrazena). Na vedlejším obr. 6.7 je fotografie víčka včetně drážky pro snímač.



Obrázek 6.6: Model víčka



Obrázek 6.7: Fotografie víčka

## 6.1. Výsledky experimentu

Měření a vyhodnocování probíhalo stejným způsobem jako u trubky bez odbočky (za pomoci FFT s využitím podmínky koherence, která byla aplikována na referenční snímač). Protože po přilepení snímačů se s nimi nijak nemanipulovalo, i v tomto případě bylo nutné vyřadit výsledky z druhého snímače.

### Uzavřený konec

Měření tlakových pulzací probíhalo jak na systému s odbočkou, tak na trubce bez LO pro obě OP. Amplitudová spektra obou případů byla vynesena do jednoho grafu. Na následujícím obr. 6.8 je zobrazen podíl amplitud  $n$ -tého snímače vůči prvnímu pro případ uzavřeného konce.

U varianty L74d75 lze největší útlum pozorovat na frekvenci 860 Hz, což vůbec neodpovídá předchozím výpočtům. Pro stejnou délku a vyšší průměry lze frekvenci odhadnout velice špatně. Z toho důvodu je vytvořen podíl průběhu poměrných hodnot. Poměr amplitudy tlaku  $n$ -tého snímače vůči prvnímu v systému s odbočkou byl vydělen stejným poměrem v systému bez odbočky. Vzniklý graf je zobrazen na obr. 6.9.

Dle grafu je největší útlum u varianty L74d75 skutečně na 860 Hz, výrazné poklesy jsou také v okolních místech na frekvencích 660, 960, 1065 a 1165 Hz. Poslední zmíněná

Obrázek 6.8: Poměr amplitud tlaku  $n$ -tého snímače vůči amplitudě tlaku prvního snímače pro uzavřený konec

Obrázek 6.9: Podíl amplitud systému s LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu v poměru ku podílu amplitud systému bez LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu pro uzavřený konec potrubí a pro různé délky a průřezy

frekvence nejlépe odpovídá předchozím výpočtům, avšak nejedná se zdaleka o největší pokles tlaku ani netlumí širší frekvenční pásmo. Pro variantu se středním průměrem L74d90 je situace výrazně jiná. Na spektru není znatelný výraznější útlum u jedné frekvence. V místech 455, 660, 960 a 1065 Hz jsou pravděpodobně největší útlumy, avšak míst s po-

dobnými hodnotami je ve spektru více. Navíc téměř všechny útlumy jsou platné pouze pro velice úzké frekvenční pásmo (v grafu znázorněno jednou, příp. dvěma hodnotami). Geometrie s největším průměrem (L74d110) stejně jako předchozí varianta nemá jednu výraznou frekvenci naladění. Znatelné jsou útlumy na 455, 960 a 1065 Hz, ale i zde se nachází více míst, které jsou stále dobře zatlumené.

Na následujícím obr. 6.10 jsou zobrazeny rozdíly fází mezi n-tým a prvním snímačem u systému s rezonátorem. Na grafech je patrné, že se jedná o data z experimentu, protože

Obrázek 6.10: Rozdíl fází n-tého a prvního snímače pro systém s LO a uzavřeným koncem

průběhy jsou místy "roztřepané", tj. nejsou tak hladké, jak tomu bylo u analytických a numerických výpočtů. Často se stává, že fáze překročí několika body hranici  $\pm 180^\circ$ , její hodnota přeskočí o  $360^\circ$ , ale po několika bodech opět překročí stejnou hranici a vrátí se zpět. V některých místech byla bodům přičtena nebo odečtena hodnota celé periody, avšak nepodařilo se automaticky tímto způsobem upravit celé spektrum.

Dle fázového spektra by se frekvence naladění u varianty L74d75 dala očekávat v okolí 865 Hz, u varianty L74d90 již u 960 Hz a u L74d110 na 1055 Hz.

V tabulce na konci této kapitoly jsou odhadnuty frekvence největšího útlumu. Při více místech útlumu s podobnými hodnotami je velice obtížné určit FN, která přesně definuje danou geometrii, a proto jsou v některých případech zavřeného konce vytvořeny pouze odhady.

### Otevřený konec

Na rozdíl od předchozích přístupů, experiment má pouze jednu podobu otevřeného konce. Graf 6.11 zobrazuje poměr mezi podílem amplitudy n-tého a prvního snímače systému s LO ku stejnému poměru v systému bez LO. Přímo zobrazená varianta L74d75 má frekvenci naladění na 1405 Hz, geometrie se středním průměrem (L74d90) na 1105 Hz a poslední varianta od stejné délky L na 899 Hz. Získané výsledky z otevřeného konce

Obrázek 6.11: Podíl amplitud systému s LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu v poměru ku podílu amplitud systému bez LO pro  $n$ -tý snímač vůči prvnímu pro otevřený konec potrubí a pro různé délky a průřezy

daleko lépe odpovídají spočítaným hodnotám. Také je viditelný trend klesající frekvence naladění s rostoucím průměrem a délkou odbočky.

V geometriích L94d110 a L114d110 nejsou znatelné výrazné útlumy přímo pro jednu frekvenci, ale je částečně utlumeno široké pásmo frekvencí. Částečně, protože některé frekvence mají útlum téměř nulový, u jiných je velice výrazný.

Ze spektra rozdílů fází  $n$ -tého a prvního snímače na obr. 6.12 lze usoudit pokles frekvence naladění se zvětšujícím se průměrem  $d$ . Průběh rozdílu fází je v okolí frekvence naladění výrazněji rozeskakaný než tomu je ve zbytku spektra. Přechody přes vlastní frekvence jsou vyhodnocené od snímačů tři, čtyři a pět téměř stejně.

V následující tabulce 6.1 jsou shrnuty frekvence naladění pro různé varianty geometrie a obě podmínky měření. Pro uzavřený konec je v některých případech obtížné určit přesnou hodnotu, proto je vytvořen pouze odhad. U otevřeného konce jsou hodnoty zřejmé, až na varianty s největším průměrem a délkou 74 a 114 mm, kde bylo vybráno místo ve středu intervalu, které má výrazný útlum tlaku. Na místech, kde je zapsáno více hodnot byl na obou frekvencích podobně výrazný útlum. Čísla v závorce značí snížení tlaku, který přibližně odpovídá trojnásobné frekvenci.

U zavřeného konce potrubí jsou výsledky velice nestejněměrné. Ačkoliv místa největšího útlumu nesledují stejný trend jako tomu bylo u předchozích přístupů, spektra obsahují mnoho míst, které stále vykazují velké snížení tlaku. Lepší pohled na danou problematiku je v další kapitole, kde jsou zakresleny spektra různých přístupů v jednom grafu.

Hodnoty frekvencí u otevřeného konce již sledují dříve pozorovanou závislost. S rostoucím průměrem  $d$  a délkou  $L$  se snižuje frekvence naladění.

Pro některé geometrie při zavřeném konci byl zjištěn velice podobný útlum tlaku u všech snímačů pro celé frekvenční spektrum, u jiných se hodnoty velmi liší v závislosti

Obrázek 6.12: Rozdíl fází  $n$ -tého a prvního snímače pro systém s LO a otevřeným koncem

Tabulka 6.1: Přibližné frekvence naladění získané z experimentálního přístupu

délka $L$ (mm)	průměr $d$ (mm)	teoretická fr. (Hz)	uzavřený konec (Hz)	otevřený konec (Hz)
74	75	1158,8	860	1405
74	90	1158,8	960/1065	1105
74	110	1158,8	1370	900
94	75	912,2	960/1065	1105
94	90	912,2	865/905	905
94	110	912,2	860/660	700/800
114	75	752,2	655/760 (1875)	1105
114	90	752,2	1065/860	905
114	110	752,2	660/860 (1876)	705/805 (1905)

na pozorovaném snímači. U otevřeného konce jsou pro danou geometrii průběhy u snímačů tři až pět velmi podobné.

## 7. Porovnání výsledků

Doposud byly představeny tři různé přístupy ke zkoumání tlakových pulzací v systému s dynamickým tlumičem. První přístup zahrnoval odvození řídicích vztahů, návrh matematického modelu pro zvolenou geometrii za pomoci odvozených rovnic s využitím okrajových podmínek, a následné řešení soustavy rovnic. Ve druhém případě byla zvolená geometrie vymodelována v počítači a vytvořena výpočetní síť, která nahradila doménu. S využitím MKP byla řešena soustava tlakových vlnových rovnic pro malé elementy. Poslední přístup byl experimentální – byla vyrobena a proměřena měřicí trať. Data byla poté zpracována za pomoci FFT.

V této kapitole jsou porovnány výsledky všech tří přístupů a diskutovány, jakým způsobem se jednotlivá spektra liší a v čem se naopak shodují. K porovnání jsou využity poměry amplitud tlaku čtvrtého a prvního snímače. Tím je získán bezrozměrný poměr, který může být využit k porovnání výsledků ze všech zkoumaných metod. K porovnání fázového spektra jsou využity rozdíly fází mezi čtvrtým a prvním snímačem.

Porovnání je nejdříve provedeno pro uzavřený konec, kde byla při modelování zvolena pouze jedna OP. Pro otevřený konec jsou porovnávány jak tlakové, tak impedanční okrajové podmínky.

### 7.1. Uzavřený konec

Amplitudová a fázová spektra je možné porovnávat mezi sebou v závislosti na zvolené pozici mikrofону. Přestože jsou spektra ze třetího, čtvrtého a pátého snímače obvykle velmi podobná, vykreslení průběhů signálů z více poloh snímačů do jednoho grafu je nepřehledné. K porovnání byl zvolen snímač na čtvrté pozici, protože se nachází již za laděnou odbočkou a současně není zcela na výstupu z trubice.

U uzavřeného konce byla vždy definována pouze jedna podmínka (podmínka tuhé stěny), proto jsou v této části porovnávány tři křivky. Na následujícím obrázku 7.1 je zobrazen poměr amplitud tlaků ze čtvrtého snímače. U první varianty (L74d75) lze vidět, že průběhy poměrů jsou pro spodní část spektra velice podobné u všech přístupů. Pro vyšší frekvence jsou křivky stále podobné, avšak více se experimentu blíží analytický přístup než numerický s výjimkou 1160 Hz, kde nebyl u experimentálních dat pozorován pokles tlakového poměru.

Průběhy poměrů u varianty se středním průměrem L75d90 jsou pro numerický a analytický výpočet téměř totožné. Největší rozdíl je v poklesech podílů tlaků na 1135 Hz pro numerický výpočet a 1160 Hz pro analytický. Tento průběh však nebyl potvrzen na základě experimentálních dat, kde byl největší pokles naměřen na 1085 Hz, což dává rozdíl s numerickým výpočtem 50 Hz a analytickým dokonce 75 Hz. Druhý velký útlum analytického a numerického přístupu je na 860 Hz, z experimentu však vychází 905 Hz (rozdíl 55 Hz). Vzniklé rozdíly jsou už velké a je nutno vyvodit, že v takovém případě nelze prohlásit shodu výpočtů s měřením.

Výsledky geometrie s největším průměrem L74d110 jsou u analytických a numerických výpočtů podobné, s výjimkou frekvenčního pásma od 1110 Hz do 1220 Hz, kde nebyl u numerického přístupu pozorován tak znatelný pokles poměru tlaku, jako u analytického. Porovnání obou průběhů s experimentem vychází stejně jako v předchozím případě – průběhy si nejsou podobné a oblasti výrazného poklesu poměru jsou posunuty do výrazně

Obrázek 7.1: Srovnání poměrů amplitud tlaku čtvrtého snímače vůči prvnímu pro uzavřený konec

jiných oblastí. Při širším pohledu na srovnávací graf si lze všimnout, že všechny 3 přístupy obsahují tři (u analytiky čtyři) výrazné poklesy poměrů tlaku v porovnání s lokálním okolím. U výpočtů<sup>1</sup> se jedná o frekvence 285, 860 a 1430 Hz, u měření 540, 1090 a 1650 Hz. Ačkoliv si frekvence neodpovídají, vzdálenosti mezi poklesy jsou srovnatelné. Podobný jev je viditelný také na předchozí variantě.

Čtvrtá varianta L94d75 zahrnuje opět dva podobné průběhy pro anal. a numerický výpočet. Propady modré a černé křivky na 285 Hz a 1430 Hz nebyly experimentem potvrzeny, avšak byla nalezena shoda s numerickým výpočtem na frekvenci 1065 Hz. Na rozdíl od předchozí varianty je zde viditelný pokles poměru tlaků v okolí 888 Hz pro všechny přístupy. Zbylé dvě varianty pro stejnou délku L94 mají velice pěkné průběhy a všechny přístupy si víceméně odpovídají, největší shoda je pozorována u velkého průměru d110.

Varianta s délkou 114 mm má velmi rozdílné experimentální výsledky pro každý průřez v porovnání se zbylými přístupy. Numerický a analytický přístup je velmi podobný, avšak pro průměr d110 lze pozorovat jisté rozdíly i mezi oběma průběhy. Při srovnání s experimentálními daty lze pozorovat stále větší shodu s rostoucím průměrem  $d$ .

Poměry amplitud pro všechny tři přístupy jsou nejvíce podobné u geometrií L74d75, L94d110 a L114d110, naopak největší rozdíly byly pozorovány u variant L74d90, L74d110, L94d75 a L114d75. Lze vypořádat, že výpočty se nejvíce shodují s měřením při variantách, ve kterých je délka odbočky podobná s vnějším průměrem odbočky.

Pro další srovnání jsou vynesena také fázová spektra. Na obr. 7.2 jsou zobrazeny rozdíly fází tlaku mezi čtvrtým a prvním snímačem. U první varianty L74d75 lze do frekvence 960 Hz pozorovat téměř stejná spektra pro analytický i numerický přístup. Oba průběhy jsou značně podobné do 1140 Hz a poté od 1450 Hz do 2 kHz. Rozdílnost křivek je viditelná na 1160 Hz, kde je zaznamenána změna nejdříve u analytického výpočtu, a na

<sup>1</sup>Výpočty je myšlen analytický a numerický přístup, měřením experimentální přístup.

Obrázek 7.2: Srovnání rozdílů fází tlaku čtvrtého a prvního snímače pro systém s LO a uzavřeným koncem

1445 Hz, kde se mění fáze u numerického průběhu. Při porovnání s experimentálními daty je viditelná jasná podobnost od počáteční frekvence do 775 Hz a poté od 1450 Hz až do poslední zkoumané frekvence. V okolí 1445 Hz je pozorován obdobný průběh pro analytický a experimentální přístup, v sousedství 1160 Hz pro numerický a experimentální. Posunutí naměřené křivky oproti vypočteným je od frekvence 785 Hz, kde byla zaznamenána nějaká změna (přechod přes tlakový uzel, vlastní frekvenci či frekvenci naladění).

Varianta L74d90 obsahuje téměř identické průběhy rozdílů fází pro numerický a analytický výpočet. Průběh z experimentu je stejně jako u amplitudového spektra velice odlišný od zbylých přístupů. Ačkoliv jsou pozorovány úseky, kde fáze velice přesně odpovídá výpočtům, jejich výskyt je spíše náhodný. Stejná situace je i u další geometrie L74d110, ve které je jediný rozdíl mezi spočítanými spektry viditelný na frekvencích 880 a 1160 Hz, kde je zaznamenána změna nejdříve od numerického výpočtu a poté od analytického. Od druhé zmíněné frekvence jsou rozdíly fází již velmi podobné.

Obdobně jako u amplitudového spektra, jsou i v případě fázových spekter viditelné závislosti experimentálních dat na analytických a numerických výpočtech pouze u některých variant. Případy jsou samozřejmě provázané, proto varianty L74d90, L74d110, L94d75 a L114d75 obsahují rozdílná experimentálně zjištěná spektra ve srovnání s numerickým a analytickým přístupem a u variant L74d75, L94d90, L94d110, L114d90 a L114d110 jsou spektra podobná.

Na základě fázových spekter bylo potvrzeno, že skutečně záleží na dané geometrii, zda se výpočty a měření shodují. Ačkoliv existují jisté rozdíly mezi analytickým a numerickým přístupem, značná část spektra pro každou geometrii je velice podobná a změna nastává pouze na několika málo místech. Při porovnání průběhů fází z experimentu vůči zbylým dvěma přístupům nelze jednoznačně určit, se kterým přístupem se data více shodují, protože leží na pomezí mezi oběma přístupy. Vezmou-li se do úvahy také amplitudová spektra, naměřené průběhy i zde leží někde mezi oběma přístupy.



Při porovnávání je nutné vzít do úvahy také fakt, že ačkoliv měřená data určitým způsobem popisují skutečnost, nejedná se o přesný popis. Při měření do procesu vstupuje mnoho nejistot, šumu a okolního rušení, proto výsledná data jsou zatížena určitou chybou. Další nepřesnosti ovlivňující výsledný průběh jsou zahrnuty při zpracování dat, ať už zaokrouhlovací chybou, která je minimální, tak nepřesností použité metody. Hlavní roli však hraje nepřesnost při samotném měření a následně vzniklé chyby jsou již nepatrné.

Díky dostupným datům systému bez laděné odbočky lze porovnat nejen místa naladění všech tří přístupů, ale i zjistit, jak moc se shodují celá spektra. Na dalším obrázku 7.3 jsou zobrazeny podíly amplitud čtvrtého snímače vůči prvnímu v systému s LO v poměru ku stejnému podílu systému bez odbočky.

Obrázek 7.3: Srovnání podílů amplitud tlaku pro čtvrtý snímač vůči prvnímu v systému s LO v poměru ku podílům amplitud tlaku čtvrtého snímače vůči prvnímu v systému bez LO pro uzavřený konec

Přímo zobrazená geometrie L74d75 má do jisté míry podobné průběhy všech tří způsobů řešení. Data z analytických a numerických výpočtů se začínají více lišit až od frekvence 1030 Hz a největší rozdíl lze pozorovat v okolí 1400 Hz. Při bližším náhledu si lze všimnout, že vyhodnocená experimentální data se více blíží k analytickému přístupu (např. na 1365 Hz), ale stále je patrné, že obsahují i oblasti blízké numerickému přístupu (ať už frekvencí či velikostí). Největší útlumy potvrzené všemi metodami jsou na 855 Hz, kde je naměřen větší útlum než byl spočítaný, dále na 1065 Hz, kde jsou si velikosti velmi podobné, 1165 Hz, kde si odpovídají experimentální a numerické hodnoty, a na 1365 Hz, kde je průběh z experimentu naopak bližší analytickému přístupu.

Na základě porovnání poměrů amplitud výše by se dalo očekávat, že pro varianty se stejnou délkou a většími průměry nebudou průběhy experimentálních dat odpovídat se zbylými dvěma přístupy. Již na variantě L74d90 je patrné, že ačkoliv průběh celého spektra není totožný, v různých místech se velmi blíží vypočítanému. U frekvence 1065 Hz byla nalezena velice podobná hodnota, zato útlum na 1165 Hz není v experimentu zdaleka tak výrazný jako u analytického a numerického přístupu, které se liší nejvíce na této frekvenci.

## 7.1. UZAVŘENÝ KONEC

Geometrie L74d110 je podobná předchozí variantě. Spektrum z numerických a analytických výpočtů je velice podobné, více odlišovat se začíná až v horní polovině zvoleného intervalu frekvencí, kde se jednotlivé útlumy od sebe vzdalují až o 20 Hz. Obrovský rozdíl je v oblasti 860 Hz, kde bylo napočítáno velké utlumení, avšak z experimentálních dat vyplývá naopak výrazné zesílení. Největší společný útlum je viditelný na 1065 Hz.

Varianta L94d75 má společný útlum na frekvenci 1065 Hz. Propad křivky experimentálního přístupu je v okolí 560 Hz na rozdíl od numerického a analytického průběhu, které sice předpokládaly útlum, ale ne tak výrazný. Rozdíly mezi numerickými a analytickými výpočty jsou větší než u ostatních geometrií. Stále je patrný společný průběh až do frekvence 750 Hz, dále se však frekvenční rozdíly mezi oběma přístupy odlišují až o 35 Hz. Velké odlišnosti v průběhu jsou viditelné od 1500 Hz nejen v této variantě, ale i několika dalších.

U varianty s délkou L94 se s rostoucím průměrem lépe shodují všechny tři průběhy. Pro střední průměr platí, že numerický a analytický výpočet se téměř překrývají s výjimkou nejvyšších frekvencí. Změřený průběh má podobný tvar se spočítanými spektry, ale u nižších frekvencí nedosahují amplitudy očekávaných velikostí. Výrazný pokles poměru tlaků pro všechny přístupy lze pozorovat na 1160 Hz a 1370 Hz. Verze s největším průměrem má experimentální data blízká se spíše analytickému výpočtu, avšak u frekvencí nad 1700 Hz křivka zcela neodpovídá ani jednomu z průběhů. Největší rozdíly lze pozorovat na frekvenci 730 Hz, kde měl být dle Ansysu propad, a na 925 Hz, kde mělo být naopak výraznější nárůst. Velké útlumy u všech přístupů byly pozorovány na frekvencích 660 Hz a 850 Hz.

Průběhy u největší zkoumané délky laděné odbočky L114 jsou velice odlišné pro každý průměr. Nejmenší průměr má nejnižší shodu všech tří přístupů. Dle obou výpočtů se očekávaný propad na 860 Hz v experimentu neuskutečnil, zato je možné vidět tlumené široké pásmo frekvencí od 540 do 660 Hz. Výrazný pokles experimentálně stanoveného průběhu je viditelný na 1065 Hz na rozdíl od numerického a analytického přístupu, které očekávaly jen malý pokles.

Střední varianta L110d90 očekávala dle výpočtů útlum v širokém pásmu frekvencí v širším okolí 750 Hz, to však experimentálně nebylo potvrzeno. Při porovnání numerického a analytického přístupu je možné pozorovat odlišný tvar obou křivek v oblasti od 1230 do 1550 Hz, zbytek spektra je téměř stejný. Největší útlumy dle experimentu jsou na frekvencích 1065 a 1165 Hz, stejné frekvence byly nalezeny také dle výpočtů. Ve značné části spektra nedosahují amplitudy u experimentálních dat očekávaných velikostí.

Poslední varianta L114d110 má nejlepší shodu všech tří přístupů. Tato geometrie je zajímavá také tím, že je velmi výrazný útlum v oblasti 1870 Hz, což přibližně odpovídá trojnásobné frekvenci naladění. Frekvence naladění shodná pro všechny přístupy je na 660 Hz a také lze pozorovat velký pokles tlaku na 860 Hz. Experimentálně zjištěný průběh v tomto případě více odpovídá analytickému přístupu.

Ve všech grafech v 7.3 bylo možné pozorovat snížení poměru amplitud tlaků v systému s laděnou odbočkou v porovnání s poměry u systému bez odbočky, útlum se však často nenacházel na primárně očekávaných frekvencích. U geometrií L74d75, L94d110 a L114d110 jsou průběhy všech tří přístupů velice podobné a čím větší je rozdíl velikosti průměru vůči délce, tím rozdílnější průběhy byly nalezeny.

Význačné útlumy z každé varianty, které jsou nalezeny experimentálním a minimálně ještě jedním přístupem, jsou vyneseny v tabulce 7.1 ve čtvrtém sloupci. První dva sloupce obsahují informaci o aktuální geometrické variantě, ve třetím sloupci je teoretická frek-

vence naladění dle vztahu (2.9). Dále jsou v tabulce zaznačeny frekvence s významným útlumem či tlumeným celým frekvenčním pásmem pro jednotlivé přístupy – pátý sloupec obsahuje analytický přístup s průtokovou okrajovou podmínkou, šestý sloupec numerický výpočet v Ansysu s podmínkou tuhé stěny a poslední sloupec obsahuje vizuálně zhodnocené výstupy z experimentálních dat. Pokud jsou v tabulce hodnoty oddělené lomítkem, byla nalezeny dvě místa útlumu s velmi podobnou velikostí a v závorkách jsou pravděpodobné útlumy na trojnásobné frekvenci naladění.

Tabulka 7.1: Srovnání frekvencí význačného útlumu pro různé přístupy řešení a různé geometrie laděné odbočky systému s uzavřeným koncem potrubí

délka $L$ (mm)	průměr $d$ (mm)	teor. fre. (Hz)	spol. útlum (Hz)	analyt. výp. (Hz)	numer. výp. (Hz)	experiment (Hz)
74	75	1158,8	855	1160	1390	855
74	90	1158,8	1065	1160	1150	1065
74	110	1158,8	1065	1160	870	1065
94	75	912,2	1060	885	1065	1065
94	90	912,2	860	885	885	1370
94	110	912,2	660/850	660/885	660/855	660/850
114	75	752,2	655	755	855	1065/600
114	90	752,2	855/1065	755 (1865)	755 (1885)	1065/1165
114	110	752,2	660 (1865)	660 (1865)	660 (1855)	660 (1876)

## 7.2. Otevřený konec

Na rozdíl od předešlé varianty, u otevřeného konce potrubí jsou jak analytické, tak numerické výpočty provedené pro okrajovou podmínku tlakovou a impedanční, proto je porovnáváno pět různých průběhů.

Na následujícím grafu 7.4 jsou zobrazeny poměry amplitud tlaku ze čtvrtého snímače vůči prvnímu v systému s laděnou odbočkou pro různé geometrie. Na všech geometriích si lze všimnout, že křivky vypočítané s využitím analytického a numerického přístupu s tlakovou podmínkou jsou velmi podobné a u variant s průměrem d90 jsou průběhy téměř totožné. Rozdílnost u ostatních variant je diskutována níže. Dalším společným znakem všech grafů je značná odlišnost průběhu pro analytický a numerický přístup s impedanční podmínkou v oblastech mimo frekvenci naladění v porovnání se zbylými přístupy. Výpočet s impedancí ovlivňuje spektrum převážně v okolí frekvence naladění, proto tlaková podmínka (numerický i analytický výpočet) lépe koresponduje s naměřenými daty. V okolí frekvence naladění je situace jiná a liší v závislosti na dané geometrii. Experimentálními datům nejvíce odpovídá numerický výpočet s tlakovou podmínkou, avšak je možné nalézt oblasti, kde ani tento přístup neodpovídá. Dále budou diskutovány pouze rozdíly v oblastech, kde byl očekávaný pokles poměru tlaku, protože průběhy na okrajích spektra jsou podobné pro všechny varianty. Případně pokud je pozorován nějaký pokles na průběhu z experimentálního přístupu, shoduje se většinou s oběma přístupy s tlakovou OP.

Snížení podílu amplitud tlaku u geometrie L74d75 bylo u experimentálního průběhu pozorováno na více místech, nedosahovalo však předpokládaných velikostí dle výpočtů. Podle numerického výpočtu s radiační (impedanční) OP byl nalezen pokles amplitudy na

Obrázek 7.4: Srovnání poměrů amplitud tlaku čtvrtého snímače vůči prvnímu pro otevřený konec

1410 Hz, analytický výpočet s tlakovou i impedanční OP našel frekvenci na 1160 Hz, numerický přístup s tlakovou podmínkou jako jediný našel oba poklesy.

Velice podobné spektrum v okolí frekvence naladění lze pro všechny přístupy vidět na druhé geometrii L74d90. Ve třetí variantě L74d110 je u experimentálního přístupu pozorován výrazný pokles na 580, 885 a 1085 Hz. První zmíněná frekvence byla vypočtena na základě analytické tlakové podmínky, druhá dle numerické s impedancí a třetí od obou analytických. Všechny tři poklesy byly nalezeny opět pouze numerickým přístupem s tlakovou OP. Pro ostatní geometrie lze pozorovat podobné chování, dle různých přístupů byly nalezeny různé oblasti velkého snížení poměrů, avšak experimentálními datům odpovídají pouze některé z nich. U varianty L114 experimentální data zcela neodpovídají žádnému z výpočtů, nejvíce se však blíží numerickému přístupu s použitím tlakové podmínky.

Na základě grafu 7.4 lze vyvodit, že nejlépe se s naměřenými daty shoduje numerický výpočet s tlakovou podmínkou. Pro lepší porovnání jsou uvedeny rozdíly fází tlaků čtvrtého a prvního snímače v stejném systému s laděnou odbočkou. Podobně jako tomu bylo u amplitudového spektra, i ve fázovém spektru jsou patrné společné znaky pro všechny geometrie. Rozdíly fází od přístupů s impedančními podmínkami jsou zcela odlišné od všech ostatních, protože představují šíření postupné tlakové vlny bez vzniku stojatého vlnění. Na rozdíl od obou tlakových podmínek a experimentálních dat, lze při použití podmínky impedance vidět frekvenci přeladění při "špičaté" změně rozdílu fází, která však není způsobena překročením mezi  $\pm 180^\circ$ . Při numerickém a analytickém výpočtu s tlakovou podmínkou jsou oba průběhy téměř totožné, přesto byly u některých geometrických variant nalezeny odlišnosti, které se objevují hlavně v oblasti výrazného poklesu poměru amplitud tlaků. Experimentální data i zde nejlépe odpovídají numerickému přístupu s tlakovou okrajovou podmínkou.

Útlumy způsobené dynamickým tlumičem je možné pro různé přístupy pozorovat na následujícím obrázku 7.6. Graf obsahuje podíl amplitud tlaku na čtvrtém snímači vůči

Obrázek 7.5: Srovnání rozdílů fází tlaku čtvrtého a prvního snímače pro systém s LO a otevřeným koncem

prvnímu v systému s laděnou odbočkou v poměru k stejnému podílu v systému bez odbočky. Útlumy se nachází hlavně na místech, kde byl pozorován výrazný pokles poměru

Obrázek 7.6: Srovnání podílů amplitud tlaku pro čtvrtý snímač vůči prvnímu v systému s LO v poměru ku podílům amplitud tlaku čtvrtého snímače vůči prvnímu v systému bez LO pro otevřený konec potrubí

amplitud tlaků v systému s odbočkou (viz obr. 7.4). V krajních částech spektra si velmi odpovídají průběhy pro analytický a numerický výpočet s impedanční podmínkou, nesou-

### 7.3. ZÁVĚREČNÁ DISKUZE

hlasí však s ostatními přístupy. Nalezené frekvence naladění jsou pro oba přístupy stejné pouze u variant se středním průměrem d90. Vypočítaná FN je u analytického přístupu stejná pro jednotlivé délky odbočky bez závislosti na průměru, kdežto u numerického výpočtu se s rostoucím průměrem FN snižuje a lépe tak koresponduje s experimentem a numerickým výpočtem s tlakovou podmínkou.

Odchylky průběhů křivek u numerického a analytického přístupu s tlakovou podmínkou jsou ve spodní frekvenční části spektra zanedbatelné. V oblasti naladění je možné pozorovat v některých případech patrné rozdíly, které v případě vzniku pokračují až k horní mezi zkoumaného intervalu frekvencí.

Nejlepší shoda experimentálních a simulovaných dat byla nalezena u numerického výpočtu s tlakovou okrajovou podmínkou. Průběhy jsou si velice podobné jak v oblastech naladění, tak spodním i horním zkoumaném frekvenčním intervalu.

V následující tabulce 7.2 jsou zaznamenány nalezené frekvence naladění pro různé přístupy, včetně předpokládané skutečné hodnoty, která byla potvrzena více metodami. Výsledky byly získány na základě vizuálního porovnání. Především u geometrie s větší délkou odbočky bylo pozorováno více oblastí s podobnými útlumy, ze kterých byla vybrána pouze jedna, proto je vhodné vycházet zejména z grafů. Tabulka je pouze orientační.

První dva sloupce obsahují informaci o variantě laděné odbočky, ve třetím sloupci je teoretická hodnota dle vztahu (2.9), čtvrtý sloupec obsahuje vizuální odhad frekvence naladění na základě experimentu a výpočtů. V pátém až devátém sloupci jsou zapsány frekvence největšího útlumu pro danou variantu, případně střed širšího tlumeného intervalu, přičemž jednotlivé přístupy jsou zahrnuty ve stejném pořadí jako následující výčet: analytický přístup s tlakovou OP, numerický výpočet s tlakovou OP, analytický výpočet s podmínkou kritického odporu (impedanční), numerický výpočet s radiační (impedanční) podmínkou a frekvence na základě zpracovaných dat z experimentu.

Tabulka 7.2: Srovnání frekvencí význačného útlumu pro různé přístupy řešení a různé geometrie laděné odbočky systému s otevřeným koncem potrubí

délka $L$ (mm)	průměr $d$ (mm)	teor. fre. (mm)	spol. fre. (Hz)	analyt. tlak (Hz)	numer. tlak (Hz)	analyt. imped. (Hz)	numer. imped. (Hz)	experi- ment (Hz)
74	75	1158,8	1405	1135	1420	1160	1410	1405
74	90	1158,8	1110	1135	1130	1160	1135	1105
74	110	1158,8	905	1135	900	1160	880	905
94	75	912,2	1090	910	1095	910	1065	1105
94	90	912,2	905	910	910	910	905	905
94	110	912,2	805	910	725	910	730	805
114	75	752,2	1105	755	855	755	855	1100
114	90	752,2	905	755	755	755	755	905
114	110	752,2	620	605	620	755	625	600

### 7.3. Závěrečná diskuze

Každý přístup má své výhody a nevýhody. Analytický přístup je jednoduchý, výpočet je rychlý, předpokládá však pouze 1D systém. Zjednodušení na 1D nemusí být vhodné a při

řešení se mohou ztratit důležité informace, což může vést k chybným výsledkům. Numerický model již počítá se soustavou ve 3D, nicméně stále využívá podobné rovnice k řešení tlakových pulzací a nebere do úvahy vnější vlivy a nedokonalosti soustavy. Navíc je k výpočtu nutný specializovaný program. Experimentální přístup by měl nejlépe odpovídat realitě, ale stále se nejedná o exaktní popis problému. Při měření vstupují do procesu určité nejistoty, které zkreslují naměřená data, proto je i experimentální přístup zatížen chybou. I přes chybu měření byla naměřená data považována za nejvíce důvěryhodná.

U otevřeného i uzavřeného konce platí, že čím je zkoumaný bod frekvenčně vzdálenější od místa naladění, tím se průběhy u všech přístupů více podobají (s výjimkou přístupů zahrnujících impedanční podmínku u otevřeného konce). Největší rozdíly mezi jednotlivými přístupy se ponejvíce vyskytují v okolí frekvence naladění.

U uzavřeného konce se lze setkat s velice odlišnými závěry v závislosti na geometrii. V některých variantách byly vypočteny velice podobné průběhy ať už z analytických, tak numerických výpočtů v porovnání s experimentálními daty, u jiných variant si průběhy naprosto neodpovídaly. Odlišnosti mohou být způsobeny jevy, které nejsou v modelu podchyceny, ale reálně se vyskytují.

Může jít o šíření tlakových obvodových vln v prostoru laděné odbočky, ale pro tak malé frekvence je to velice neočekávané. Dále může být průběh ovlivněn reálnou geometrií tratě (vyrobené měřicí tratě), která je určitým způsobem nepřesná v porovnání s návrhem. Jistou roli hraje nedokonalost matematického modelu. Pro všechny simulace byly některé členy z výchozích rovnic zanedbány z důvodů velmi malého předpokládaného dopadu na výsledky. Vzroste-li velikost těchto členů, mohou hrát nemalou roli při skutečném šíření tlakových pulzací a jistým způsobem ovlivnit výsledek. Za určitou odchylku může být zodpovědný přechod přes vlastní frekvence v rámci frekvenčního spektra. Na vlastní frekvenci jsou pozorovány násobně vyšší hodnoty tlaku, což vede na rozsáhlý interval zkoumaných hodnot. Všechny zmíněné účinky se mohou vyskytnout i u varianty s otevřeným koncem. Větší ovlivnění u otevřeného konce v porovnání se zavřeným je při šíření rušivého signálu z okolí.

U analytického výpočtu hraje velkou roli zvolená délka a průřez odbočky. Jelikož je model pouze 1D, nebyly simulovány dvě řady děr, které spojují hlavní potrubí a odbočku. Tento spoj byl v modelu realizován bodově, což vedlo k velkým nepřesnostem. Navíc místo připojení bylo uvažováno přesně mezi oběma řadami. Nebyl zvažován ani vliv hloubky děr (tloušťky hlavního potrubí). Pro optimalizování průběhů z analytických simulací by bylo vhodné nalézt parametry délky  $L$  a průměru  $d$  (průřezu), které korespondují s experimentálním přístupem. Tím by se analytický model určitým způsobem "vyladil" na základě experimentu. Zmíněná optimalizace nebyla z důvodu rozsahu práce provedena.

Při porovnání přístupů u varianty s otevřeným koncem lze shrnout, že největší shodu experimentálních dat se simulovanými má numerický přístup s využitím tlakové okrajové podmínky. Rozdíly mezi analytickým a numerickým přístupem jsou pro obě zkoumané podmínky převážně v okolí frekvence naladění. Protože použitá impedanční podmínka je pouze teoretická, bylo by možné její hodnotu vyladit s experimentálními daty (stejně jako průměr a délku u analytického modelu), aby si průběhy lépe odpovídaly.

Na závěr lze shrnout, že simulace u otevřeného konce dopadly velice přívětivě a ve značné části odpovídaly numerické simulaci s tlakovou podmínkou. Tento přístup je možné použít na přibližné určení tlakových pulzací v systému s podobně konstruovanou laděnou



### 7.3. ZÁVĚREČNÁ DISKUZE

odbočkou. U geometrie s uzavřeným koncem nelze doporučit návrh na základě simulací a daná problematika by zasloužila rozsáhlejší studii.

# Závěr

Tématem práce je zkoumání šíření tlakových pulzací v potrubním systému s dynamickým tlumičem. Motivací k řešení byl návrh laděné odbočky, která je jednoduchá, levná a její realizace výrazně nenaruší celistvost původního potrubního systému. Důležitým faktorem při návrhu bylo prostorové uspořádání, kdy odbočka zasahuje do prostoru minimálně a je v těsné blízkosti k připojovanému potrubí. Stále však plní svou primární funkci, tj. přeladit systém tak, aby tlakové pulzace na požadovanou frekvenci byly co nejvíce zatlumeny.

Nejdříve jsou odvozeny řídicí rovnice pro tlak a průtok, které popisují chování pulzací v jednoduchém systému v závislosti na poloze a na čase. Za pomoci okrajových podmínek byl provázán systém více rovnic, který analyticky popisuje vlastní navržený potrubní systém s laděnou odbočkou a otevřeným, a nebo uzavřeným koncem potrubí. Po vyřešení systému byla získána informace o průběhu tlaku (příp. průtoku) v každém místě potrubní sítě. V práci jsou zobrazeny časové animace průběhu tlaku po délce potrubí, na kterých lze vidět fungování odbočky.

Numerický přístup řešení využívá podobné rovnice jako analytický přístup, avšak řešení probíhá ve 3D na diskrétní síti. Na výpočetní síti tvořené velkým množstvím elementů je řešen systém tlakových rovnic za pomoci MKP. Řešení u obou přístupů bylo provedeno s uvažováním dynamické i objemové viskozity.

Nad rámec zadání této diplomové práce bylo provedeno experimentální ověření uvedených přístupů. Podrobně je popsáno zapojení reproduktoru a soustavy šesti mikrofónů na měřicí trati. Snímače byly nejdříve testovány a byla ověřena správnost jejich funkčnosti. Naměřená data jsou vyhodnocena za pomoci Fourierovy transformace s dodržením podmínky koherence pro zvýšení přesnosti. V rámci vyhodnocení je diskutována délka zvoleného záznamu.

Ke zjištění referenčního stavu systému bylo provedeno měření na potrubí bez odbočky. Data byla využita jak k porovnání výsledků systému s laděnou odbočkou, tak k určení frekvenční závislosti objemové viskozity vzduchu. Na základě matematického modelu pro jeden úsek potrubí a měřených dat byla vytvořena přeúčtená soustava rovnic, která byla řešena za pomoci metody nejmenších čtverců. Vzhledem k tomu, že se jedná o nelineární rovnice s komplexními exponenty, bylo nejdříve porovnáno několik algoritmů výpočtu a z nich vybrán genetický algoritmus. Zvolený algoritmus je časově náročnější, ale měl ze všech porovnávaných největší stabilitu. Při výpočtu nebyla hledána pouze objemová viskozita, ale i rychlost zvuku. Aproximace závislosti objemové viskozity proběhla pomocí robustní metody nejmenších čtverců a nalezený vztah byl závislý se zápornou druhou mocninou frekvence. Pro vizuální ověření nalezeného řešení je zobrazen v animaci časový vývoj průběhu tlaku po délce potrubí společně s měřeními (prokládanými) daty.

Významnou částí práce je srovnání výsledků nalezených dle analytického, numerického a experimentálního přístupu. Společným znakem pro všechny přístupy je relativně přesný popis spektrálních oblastí, které jsou frekvenčně nejvíce vzdálené od frekvence naladění. V oblasti naladění se výsledky dle jednotlivých variant liší.

U varianty s uzavřeným koncem potrubí se podařilo nalézt pouze částečnou shodu výpočtů s experimentálními daty. Některé geometrické varianty odpovídaly velice přesně, u jiných se výpočty a měření shodovaly výrazně méně. Výsledky z analytického a numerického přístupu jsou velice podobné. Přestože numerické řešení by mělo lépe odpovídat

### 7.3. ZÁVĚREČNÁ DISKUZE

skutečnosti z důvodu přesnějšího geometrického popisu, experimentální data se nachází na pomezí mezi oběma přístupy.

V případě varianty s otevřeným koncem vychází lepší shoda s experimentem u numerických výpočtů. Analytický přístup počítá se stejnou frekvencí naladění pro různé průměry laděné odbočky. Experimentální data potvrzují pokles frekvence naladění při rostoucí délce nebo průměru tlumiče, jak předpokládá numerický výpočet. Nejlepší shoda experimentu s modely vychází pro numerické řešení s tlakovou okrajovou podmínkou, za pomoci které je možné provést návrh podobného rezonátoru v praxi.

Na dané téma by bylo možné navázat řešením provázané soustavy potrubí–tekutina, která by výsledky popisovala přesněji. V práci jsou zmíněna zajímavá témata, která byla představena jen velmi okrajově, ale zasloužila by další studium. Mezi ně patří optimální volba vyhodnocované délky záznamu při Fourierově transformaci, aby bylo dosaženo přesných výsledků a současně řešení netrvalo příliš dlouho či optimalizace parametrů popisujících laděnou odbočku dle experimentálních dat, aby matematický model lépe odpovídal skutečnosti. Přestože je zkoumané téma velice rozsáhlé, věříme, že práce poskytuje dobrý vhled do předložené problematiky.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] ACHESON, D. J. *Elementary fluid dynamics*. New York: Oxford University Press, 1990. ISBN 0-19-859679-0.
- [2] Ansys® Academic Research Mechanical, Release 20.2, Help System, Mechanical User's Guide, Harmonic Acoustics Analysis, ANSYS, Inc.
- [3] Ansys® Academic Research Mechanical, Release 20.2, Help System, Theory Reference, Acoustics, ANSYS, Inc.
- [4] BACON, Michael E. Speed of Sound Versus Temperature Using PVC Pipes Open at Both Ends. *The Physics Teacher* [online]. AIP Publishing, 2012, 24 August 2012, **50**(6), 4 [cit. 2021-03-05]. Dostupné z: [doi:10.1119/1.4745687](https://doi.org/10.1119/1.4745687)
- [5] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-1344-X.
- [6] BRENNAN, John. How Does Humidity Affect Speed of Sound? *Sciencing: Waves* [online]. March 09, 2018 [cit. 2021-03-17]. Dostupné z: <https://sciencing.com/humidity-affect-speed-sound-22777.html>
- [7] BURESTI, Guido. A note on Stokes' hypothesis. *Acta Mechanica* [online]. 2015, 226(10), 3555-3559 [cit. 2021-03-20]. ISSN 0001-5970. Dostupné z: [doi:10.1007/s00707-015-1380-9](https://doi.org/10.1007/s00707-015-1380-9)
- [8] CRAMER, Owen. The variation of the specific heat ratio and the speed of sound in air with temperature, pressure, humidity, and CO 2 concentration. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1993, 93(5), 2510-2516 [cit. 2021-03-17]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: [doi:10.1121/1.405827](https://doi.org/10.1121/1.405827)
- [9] *Discovering the Speed of Sound in Air* [online]. In: . Flinn Scientific, 2017, s. 5 [cit. 2021-03-05]. Dostupné z: <https://www.flinnsci.com/api/library/Download/c59d272237e144f9b921c0f0697fdf6b>
- [10] FALLER, Larry D. *Relaxation phenomenon: physics and chemistry* [online]. Britannica, 2016 [cit. 2021-03-21]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/relaxation-phenomenon>
- [11] FLETCHER, Neville H. a Thomas D. ROSSING. *The Physics of Musical Instruments*. New York: Springer-Verlag, 1991. ISBN 0-387-96947-0.
- [12] HABÁN, Vladimír. *Vysokofrekvenční pulsace ve vodních strojích*. Brno, 2010. Habilitační práce. VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana.
- [13] HARRIS, Cyril M. Effects of Humidity on the Velocity of Sound in Air. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1971, 49(3B), 890-893 [cit. 2021-03-17]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: [doi:10.1121/1.1912429](https://doi.org/10.1121/1.1912429)

- [14] HOOVER, William G., Anthony J. C. LADD, Richard B. HICKMAN a Brad Lee HOLIAN. Bulk viscosity via nonequilibrium and equilibrium molecular dynamics. *Physical Review A* [online]. 1980, **21**(5), 1756-1760 [cit. 2021-03-24]. ISSN 0556-2791. Dostupné z: [doi:10.1103/PhysRevA.21.1756](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.21.1756)
- [15] JAEGER, Herbert. Measuring the Acoustic Impedance of Pipes and Musical Instruments. *Researchgate* [online]. Department of Physics, Miami University, Oxford, 2007 [cit. 2021-5-8]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/253190455>
- [16] KASPER, Lutz, Patrik VOGT a Christine STROHMEYER. Stationary waves in tubes and the speed of sound. *The Physics Teacher* [online]. AIP Publishing, 2015, 29 December 2014, **53**(1), 3 [cit. 2021-03-05]. Dostupné z: [doi:10.1119/1.4904249](https://doi.org/10.1119/1.4904249)
- [17] LIN, Jeffrey, Carlo SCALO a Lambertus HESSELINK. *Bulk viscosity model for near-equilibrium acoustic wave attenuation* [online]. July 20, 2017 [cit. 2021-03-20]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1707.05876.pdf>
- [18] Lineární ODR  $n$ -tého řádu: Homogenní LODR $n$  s konstantními koeficienty. *Mathonline* [online]. Brno: ÚM FSI VUT [cit. 2021-03-28]. Dostupné z: <https://mathonline.fme.vutbr.cz/Linearni-ODR-n-teho-radu/sc-54-sr-1-a-68/default.aspx>
- [19] MATLAB Documentation. *MathWorks, Inc* [online]. 2021 [cit. 2021-5-6]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [20] MAYOTT, Clarence. Coherent Sampling with PScope. *Analog Devices* [online]. [cit. 2021-5-1]. Dostupné z: <https://www.analog.com/en/technical-articles/coherent-sampling-with-pscope.html>
- [21] MORFEY, C. L. a G. P. HOWELL. Speed of sound in air as a function of frequency and humidity. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1980, **68**(5), 1525-1527 [cit. 2021-03-17]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: [doi:10.1121/1.385080](https://doi.org/10.1121/1.385080)
- [22] NOVÝ, Richard. *Hluk a chvění*. Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04347-9.
- [23] RIENSTRA, S.W. a A. HIRSCHBERG. *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2004, 339 s.
- [24] ROSENHEAD, L. Introduction. The Second Coefficient of Viscosity: A Brief Review of Fundamentals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* [online]. The Royal Society, 1954, **226**(1164), 1-6 [cit. 2021-03-21]. ISSN 00804630. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/99581?seq=1>
- [25] SHARMA, Bhanuday a Rakesh KUMAR. Estimation of bulk viscosity of dilute gases using a nonequilibrium molecular dynamics approach. *Physical Review E* [online]. 2019, **100**(1) [cit. 2021-03-21]. ISSN 2470-0045. Dostupné z: [doi:10.1103/PhysRevE.100.013309](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.013309)
- [26] SKOPALOVÁ, Kristýna. *Vlastní a vynucené kmitání kapaliny v rotačně symetrické oblasti*. Brno, 2017, 80 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochylý, Csc.

- [27] TISZA, L. Supersonic Absorption and Stokes' Viscosity Relation. *Physical Review* [online]. 1942, 61(7-8), 531-536 [cit. 2021-03-20]. ISSN 0031-899X. Dostupné z: [doi:10.1103/PhysRev.61.531](https://doi.org/10.1103/PhysRev.61.531)
- [28] TRUAX, Barry. *Handbook for Acoustic Ecology* [online]. Second Edition. 1999 [cit. 2021-5-1]. Dostupné z: <https://www.sfu.ca/sonic-studio-webdav/handbook/index.html>
- [29] Vibration Technology: Frequency domain. *Sensors, networking and control systems - ifm electronic* [online]. [cit. 2021-4-30]. Dostupné z: <https://www.ifm.com/ie/en/shared/technologies/real-time-maintenance/technology/frequency-domain>
- [30] ZUTH, Daniel. *Analýza nejistot ve vibrodiagnostice*. Brno, 2009. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí práce František Vdoleček.

# Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Název
$\kappa$	(–)	Poissonova konstanta
$\lambda$		kořen rovnice
$\mu$	(Pa·s)	dynamická viskozita tekutiny
$\mu_b$	(Pa·s)	objemová viskozita
$\omega$	(rad·s <sup>-1</sup> )	úhlová rychlost
$\Pi_{ij}$	(Pa)	tenzor nevratných (třecích) napětí
$\rho$	(kg·m <sup>-3</sup> )	hustota
$\sigma_{ij}$	(Pa)	Cauchyho tenzor napětí
$\tau_{ij}$	(Pa)	tenzor vratných napětí
$a$	(m·s <sup>-1</sup> )	rychlost zvuku
$a_k$	(m·s <sup>-1</sup> )	komplexní rychlost zvuku
$a_{c1}$	(m·s <sup>-1</sup> )	hledaný parametr představující rychlost zvuku
$a_{c2}$	(m·s <sup>-1</sup> )	hledaný parametr předst. objemovou viskozitu
$b$	(Pa·s)	druhá dynamická viskozita tekutiny
$C$		konstanta
$e$	(–)	Eulerovo číslo
$Error$	(–)	celková nepřesnost (chyba)
$f_i$	(m·s <sup>-2</sup> )	zrychlení způsobené vnějšími objemovými silami
$f$	(Hz)	frekvence
$g_i$	(m·s <sup>-2</sup> )	gravitační zrychlení
$h$	(Pa)	součinitel objemové viskozity
$i$	(–)	imaginární jednotka
$K$	(Pa)	modul objemové pružnosti
$L$	(m)	délka odbočky
$L_{potr}$	(m)	délka potrubí
$p$	(Pa)	tlak plynu
$p_e$	(Pa)	hydrostatický/termodynamický tlak
$p_m$	(Pa)	mechanický tlak
$p_k$	(Pa)	komplexní tlak
$Q$	(m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	průtok
$Q_b$	(kg·m <sup>-3</sup> ·s <sup>-1</sup> )	hmotnostní zdroj pulzací (mass source)
$r$	(J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )	měrná plynová konstanta
$s$	(J·K <sup>-1</sup> )	entropie
$S$	(m <sup>2</sup> )	plocha průřezu potrubí
$T$	(K)	termodynamická teplota
$T(t)$		časově závislá funkce
$V$	(m <sup>3</sup> )	objem plynu
$v$	(m·s <sup>-1</sup> )	rychlost
$v_{ij}$	(s <sup>-1</sup> )	tenzor rychlosti deformace
$v_{kk}$	(s <sup>-1</sup> )	divergence rychlosti
$X(x)$		polohově závislá funkce
$z$	(Pa·s·m <sup>-1</sup> )	akustická impedance



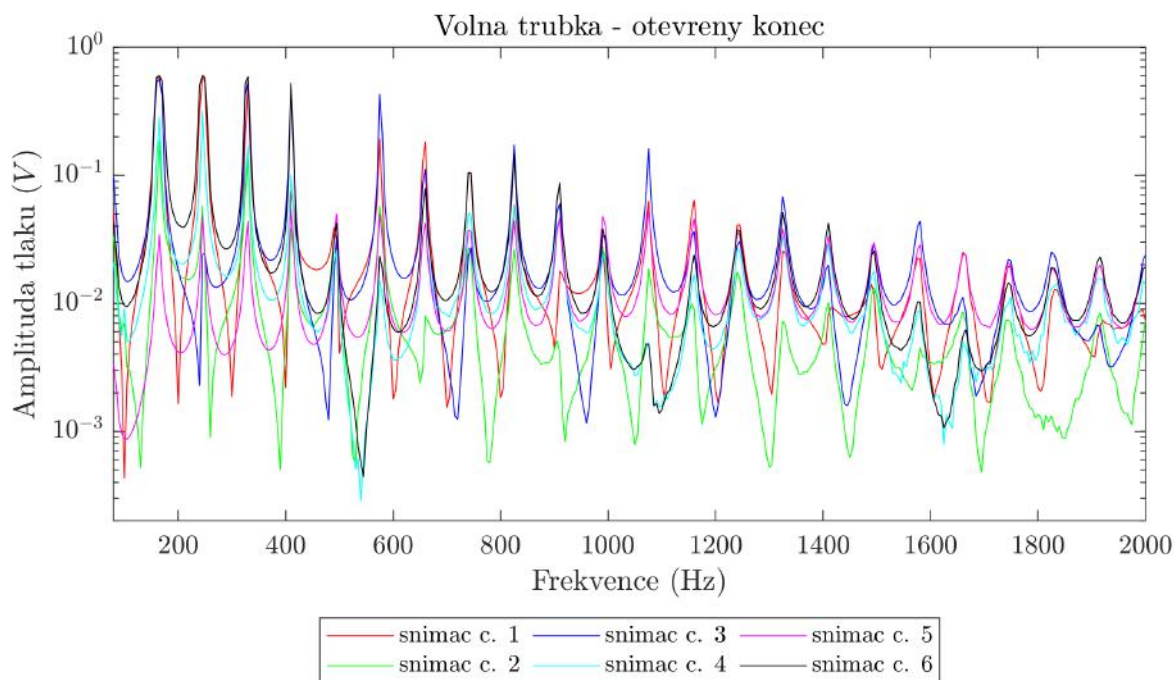
## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

### Zkratka

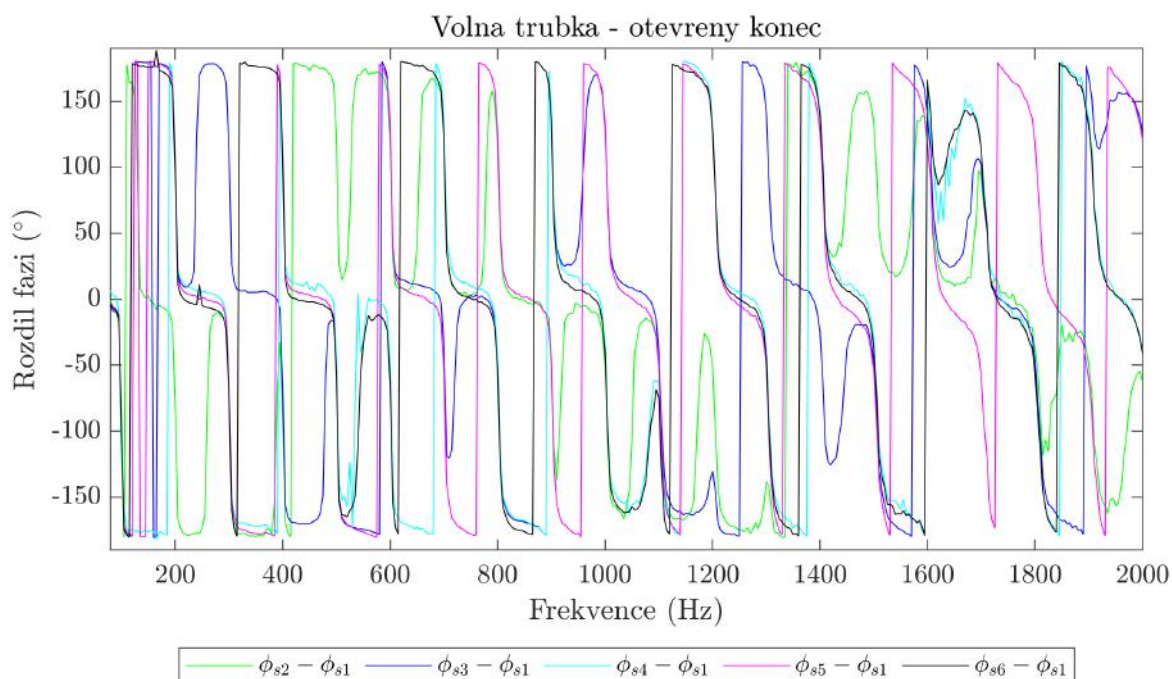
1D	jednodimenzionální
1VF	první vlastní frekvence
3D	třídimenzionální
CAD	Computer aided design
FFT	rychlá Fourierova transformace (fast Fourier transform)
FN	frekvence naladění
FT	Fourierova transformace
GA	genetický algoritmus
LO	laděná odbočka
LODE2	lineární obecná diferenciální rovnice druhého řádu
LPDE2	lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu
MKP	metoda konečných prvků
OP	okrajová podmínka
PVC-U	Polyvinyl Chlorid unplasticized
VF	vlastní frekvence

# Přílohy

## Měření na trubce – otevřený konec



Obrázek A: Amplitudové spektrum tlaku pro trubku s otevřeným koncem



Obrázek B: Fázové spektrum tlaku pro trubku s otevřeným koncem